

Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»

В.А. Гусев, А.Г. Рубин

**МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ**
ГЕОМЕТРИЯ

11 класс



Базовый и углублённый уровни

БАЛСС

Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»

В.А. Гусев, А.Г. Рубин

**МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ**

ГЕОМЕТРИЯ

11 класс

Базовый и углублённый уровни

Москва

БАЛСС

2016

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721
Г96

Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»



Руководитель издательской программы –
член-корр. РАО, доктор пед. наук, проф. *Р.Н. Бунеев*

Гусев, В.А.
Г96 **Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 11 кл. : учеб. для организаций, осуществляющих образовательную деятельность. Базовый и углублённый уровни / В.А. Гусев, А.Г. Рубин. – М. : Баласс, 2016. – 352 с. (Образовательная система «Школа 2100»).**

ISBN 978-5-905683-94-7

Учебник «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия» предназначен для учащихся 11 класса, изучающих предмет на базовом или углублённом уровне. Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего общего образования. Является продолжением непрерывного курса математики и составной частью комплекта учебников развивающей Образовательной системы «Школа 2100».

Может использоваться как учебное пособие.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я721

Данный учебник в целом и никакая его часть не могут быть
скопированы без разрешения владельца авторских прав

ISBN 978-5-905683-94-7

© Гусев В.А., Рубин А.Г., 2016
© ООО «Баласс», 2016

Дорогие ребята!

Перед вами учебник геометрии для 11 класса Образовательной системы «Школа 2100». Он предназначен для изучения геометрии как на базовом, так и на углублённом уровне.

Изучая геометрию, вы научитесь работать с разными геометрическими фигурами, узнаете многие их свойства и признаки, сможете узнавать их среди окружающих вас предметов, вычислять характеризующие их величины: длины, углы, площади, объёмы и др., моделировать с их помощью некоторые реальные объекты и ситуации. Это поможет вам стать увереннее в себе, добиться успехов при решении возникающих в жизни задач, так как при этом очень часто придётся иметь дело с геометрическими фигурами.

Приведённый в учебнике теоретический материал обозначен так:

ОТКРЫВАЕМ НОВЫЕ ЗНАНИЯ

Основной теоретический материал, который необходимо знать каждому ученику, выделен слева на полях книги сплошной оранжевой чертой. Этот материал должен знать учащийся и базового, и углублённого уровня. Именно этот материал составляет основу курса, без его усвоения невозможно получить удовлетворительную отметку.

Теоретический материал, не выделенный оранжевой чертой на полях, предназначен для более глубокого изучения геометрии, её практического применения в науке и технике. Этот материал будет способствовать вашему математическому развитию. Он является обязательным для занимающихся на углублённом уровне, но занимающиеся на базовом уровне тоже могут при желании к нему обращаться.

Кроме того, в учебнике есть целые параграфы, предназначенные для изучения только на углублённом уровне. Номера таких параграфов отмечены звёздочкой, и в их начале помещено изображение совы:



Приводимые в учебнике исторические сведения помогут вам понять, как зарождалась и развивалась геометрия, какие события сопутствовали некоторым её открытиям и достижениям.

РАЗВИВАЕМ УМЕНИЯ

Так обозначены задания на применение знаний. Они даны на трёх уровнях сложности:

- Н** **Необходимый уровень.** Задания, которые должны уметь выполнять все учащиеся. Выполнение этих заданий поможет вам понять, усвоены ли основные понятия и факты, умеете ли вы применять их к решению стандартных задач.
- П** **Повышенный уровень.** Задания, предназначенные для учащихся, которые хотят усовершенствовать свои знания. Эти задания требуют более серьёзного усвоения учебного материала, для их решения, наряду с известными приёмами и идеями, может понадобиться выдвижение некоторой новой идеи. Особое значение эти задания имеют для углублённого уровня обучения.
- М** **Максимальный уровень.** Эти задания выполняют те учащиеся, которые хотят научиться решать более сложные, нестандартные задачи. Работа над ними может потребовать значительных усилий, изобретательности и настойчивости.

При этом **ни на одном из уровней выполнение всех заданий, предложенных в учебнике, не является обязательным!** Ученики под руководством педагога выбирают задания в соответствии со своими возможностями и потребностями.

Среди заданий необходимого уровня мы дополнительно выделяем следующие две группы заданий и отмечаем их особыми знаками:

-  Так обозначается группа задач и вопросов, которые *учат делать выводы*, т.е. получать следствия из условия задачи. С помощью этих заданий вы можете проверить, усвоен ли вами основной теоретический материал. Уметь справляться с такими заданиями должен каждый ученик.
-  Так отмечены *задания для самоконтроля*; в них нужно не только получить следствие из условия задачи, но и *выяснить причину появления этого следствия*.

Примерно к половине всех заданий в конце учебника приводятся ответы.

Ориентироваться в учебнике вам помогут условные обозначения



Вопросы, которые помогают понять тему, сделать вывод.



Обратите особое внимание!

Структура учебника

Учебник разбит на разделы, разделы – на главы, а каждая глава – на параграфы. Каждый параграф обозначается двумя числами: число слева от точки – номер главы, а число справа от точки – номер параграфа в этой главе. В каждой главе рассматривается своя тема, а в каждом параграфе – отдельные вопросы этой темы. Большие по объёму параграфы дополнительно разбиты на пункты. Каждый пункт обозначается тремя числами: первое – номер главы, второе – номер параграфа в этой главе, третье – номер пункта в этом параграфе.

В конце книги помещены **приложения**, которые помогут вам быстрее найти нужную информацию: *тематический указатель, указатель аксиом, указатель определений и указатель теорем.*

Кроме перечисленных выше обозначений, вы встретите на страницах книги и другие знаки, смысл и предназначение которых сейчас будут объяснены.

Некоторые утверждения в геометрии принимают без доказательства, их называют аксиомами. Аксиомы выделяются вот так:

Аксиома n

Буква n обозначает порядковый номер аксиомы в учебнике.

Когда мы даём изучаемому в учебнике понятию точное определение, мы выделяем его вот так:

Определение n

Буква n обозначает порядковый номер определения в учебнике. Определения, которые должен знать каждый учащийся, выделены в указателе определений жирным шрифтом.

В тех случаях, когда мы формулируем и доказываем теорему, она выделяется вот так:

Теорема n

Буква n обозначает порядковый номер теоремы в учебнике.

Каждое доказательство теоремы начинается словом «Доказательство». В конце доказательства ставится знак ■, который означает, что доказательство проведено полностью. Обязательные для изучения на базовом уровне теоремы в указателе теорем выделены жирным шрифтом.

Работая по нашему учебнику, вы не только узнаете много нового, не только научитесь решать большое количество разнообразных геометрических задач, но и приобретёте важнейшее умение – учиться самостоятельно:

- ставить учебную цель;
- планировать своё движение к цели и действовать по плану;
- оценивать результаты своего труда.

ГЛАВА 1

ЦИЛИНДР

Наглядное понимание играет
первенствующую роль в геометрии
Давид Гильберт
(немецкий математик, 1862–1943)

§ 1.1



ЦИЛИНДР КАК ФИГУРА ВРАЩЕНИЯ

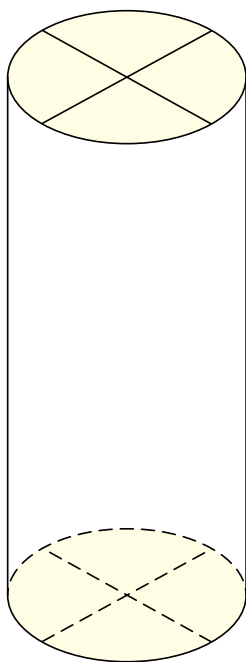


Рис. 1.1.

Мы уже неоднократно встречались с геометрической фигурой – *цилиндром*. При этом мы пока не давали определения этой фигуры.



Как можно определить и построить цилиндр?

Чаще всего мы имеем дело с так называемым *круговым цилиндром*, в основаниях которого находятся круги (рис. 1.1).

Мы будем рассматривать цилиндр как фигуру вращения. Возьмём прямоугольник M и ось l , содержащую одну из его сторон (рис. 1.2а).

Если этот прямоугольник M вращается вокруг оси l , то в результате вращения мы получим фигуру вращения – *цилиндр* (рис. 1.2б).

Дадим такое определение цилиндра:

Определение 1. *Цилиндром* называется фигура, полученная вращением прямоугольника вокруг его стороны.

В этом определении мы говорим о *круговом цилиндре*, именно круговые цилиндры в основном изучаются в школе.

В окружающем нас мире, в технике, в других науках очень часто встречаются объекты, имеющие форму цилиндра: консервная банка, хоккейная шайба, графитовый стержень в батарейке, цилиндр двигателя внутреннего сгорания или поршневого насоса, шахтный ствол, отверстие, просверленное в доске перпендикулярно её поверхности, пустоты цилиндрической формы,

различные технические детали (рис. 1.3), части архитектурных сооружений. Используя определение цилиндра, свойства прямоугольника и свойства вращения фигуры вокруг оси, можно получить различные свойства цилиндра и его элементов. Все полученные свойства нужно доказать самостоятельно.

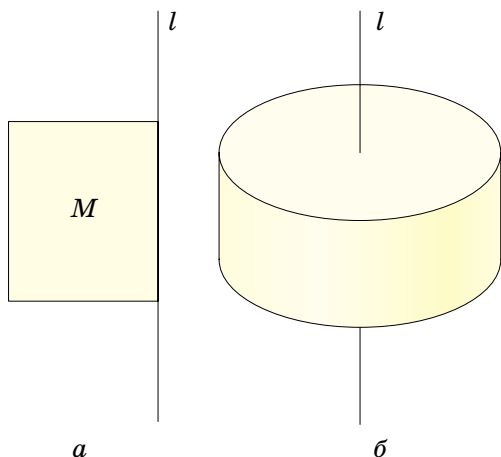


Рис. 1.2.

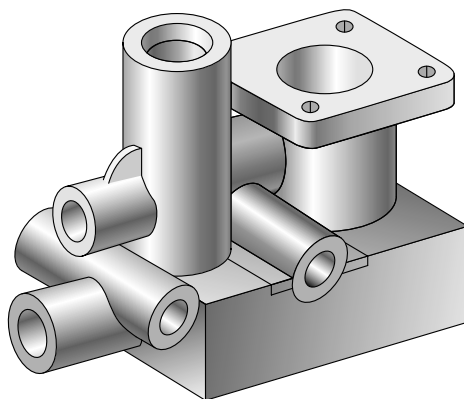


Рис. 1.3

На рис. 1.4 изображён цилиндр, полученный при вращении прямоугольника AOO_1B вокруг стороны OO_1 .

1. Стороны OA и O_1B прямоугольника описывают равные круги, лежащие в параллельных плоскостях. Эти круги называют *основаниями цилиндра*, а радиус каждого из них – *радиусом цилиндра*. Итак, у цилиндра есть два основания – круги. Вот почему определённый выше цилиндр является круговым цилиндром (в дальнейшем мы практически всегда будем рассматривать именно круговые цилиндры).

2. Сторона AB параллельна оси цилиндра, она называется *образующей цилиндра* и описывает кривую поверхность, называемую *боковой поверхностью цилиндра*. Все образующие одного цилиндра равны и параллельны друг другу, так как каждая из них равна стороне вращающегося прямоугольника и параллельна оси цилиндра. Образующие цилиндра перпендикулярны плоскостям оснований цилиндра.

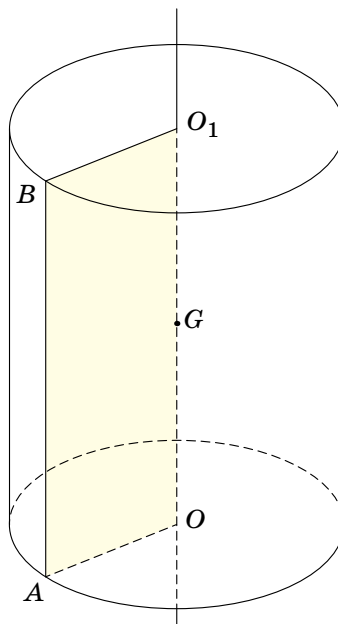


Рис. 1.4.

3. Длина образующей – *высота цилиндра*: она равна расстоянию между плоскостями оснований – отрезку OO_1 .

Если образующая цилиндра перпендикулярна основаниям, т.е. равна высоте цилиндра, то цилиндр называют *прямым круговым цилиндром*. На рис. 1.4. изображён прямой круговой цилиндр.

Однако в геометрии и в окружающем нас пространстве есть другие виды цилиндров, например, наклонные (рис. 1.5). В Италии есть уникальное сооружение – Пизанская башня (рис. 1.6). Некоторые считают, что она имеет форму наклонного цилиндра (сравните с рис. 1.5). Другие говорят, что изначально она имела форму прямого цилиндра, а он остаётся прямым и при изменении положения в пространстве (см., например заставку к данному параграфу). А что вы думаете по этому поводу?

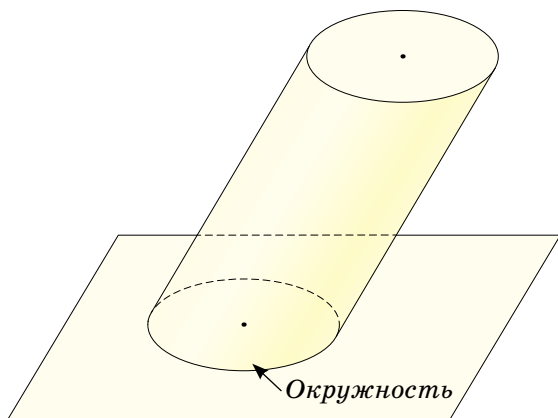


Рис. 1.5



Рис. 1.6

Мы рассмотрели прямой круговой цилиндр как фигуру вращения. Можно при определении цилиндра использовать более общее понятие *цилиндрической поверхности*.

Пусть на плоскости α дана замкнутая линия L и ограниченная ею фигура F . Кроме этого дана прямая l , пересекающая плоскость α (рис. 1.7а).

Если через каждую точку линии L провести прямую, параллельную прямой l , то множество всех точек этих прямых образует поверхность, которая называется *цилиндрической поверхностью* (рис. 1.7б).

Данная линия L называется *направляющей цилиндрической поверхности*, параллельные прямые, которым принадлежат точки поверхности – *образующими*. Так как направляющая линия замкнута, то и цилиндрическая поверхность называется замкнутой (рис. 1.7б).

Если провести плоскость β , параллельную плоскости α , то в пересечении с цилиндрической поверхностью мы получим замкнутую линию L_1 и ограниченную ею фигуру F_1 (рис. 1.7в). При этом фигура F_1 параллельна и равна фигуре F .

Представьте себе, что направляющей линией является контур многоугольника, например четырёхугольник $ABCD$. Тогда мы получаем призматическую поверхность (рис. 1.8). Если же направляющей будет прямая a , то поверхность, очевидно, будет плоскостью (рис. 1.9).

Определение 2. Цилиндром называется фигура, ограниченная замкнутой цилиндрической поверхностью и двумя фигурами, которые получаются от пересечения этой поверхности двумя параллельными плоскостями, пересекающими образующие.

На рис. 1.7в изображён цилиндр. Фигуры F и F_1 называются *основаниями цилиндра*. Расстояние между основаниями называется *высотой цилиндра*.

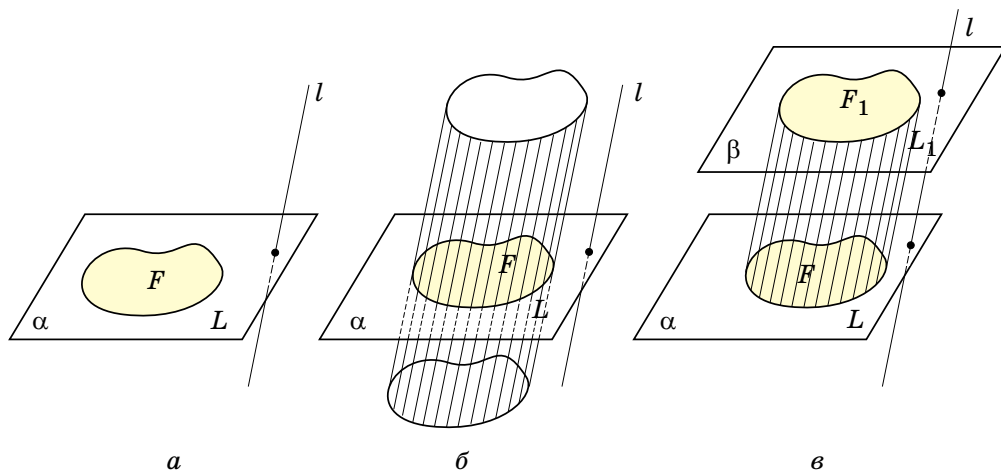


Рис. 1.7

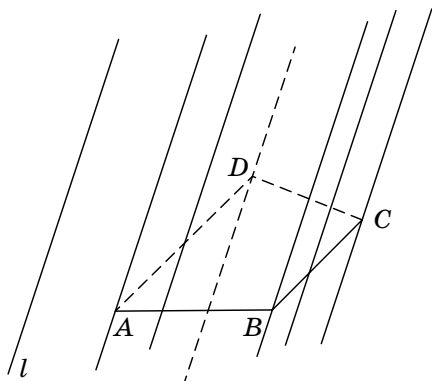


Рис. 1.8

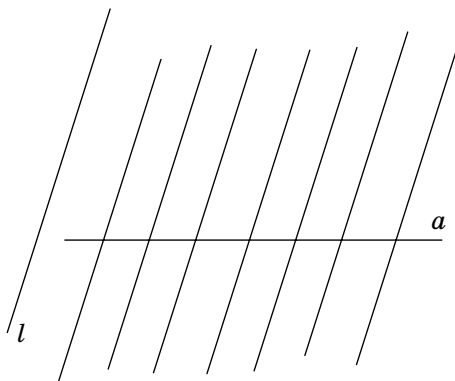


Рис. 1.9

дра; на рис. 1.10 а отрезок OO_1 является высотой цилиндра. Если основания цилиндра перпендикулярны образующим, то цилиндр называется *прямым*. Если же они не перпендикулярны образующим, то цилиндр называется *наклонным*. Если направляющая прямого цилиндра – окружность, то цилиндр является *прямым круговым*, или *цилиндром вращения* (рис. 1.4).

Используя понятие цилиндрической (призматической) поверхности, можно по-новому определить понятие призмы (сделайте это самостоятельно).

§ 1.2



СЕЧЕНИЯ ЦИЛИНДРА

В дальнейшем мы будем рассматривать только прямые круговые цилиндры. Рассмотрим различные сечения цилиндра плоскостями.

Под сечением цилиндра плоскостью понимается фигура, являющаяся общей частью цилиндра и плоскости, если при этом она не является точкой, образующей цилиндра или его основанием.

А. Сечения можно проводить через ось цилиндра (рис. 1.10а). Такие сечения цилиндра называют *осевыми сечениями*. Осевые сечения всегда имеют форму прямоугольника (вывод обоснуйте). Сторонами осевого сечения являются диаметры оснований и две образующие цилиндра.

На рис. 1.10 а сечения AA_1B_1B и CC_1D_1D являются осевыми сечениями. Если осевое сечение цилиндра – квадрат, то цилиндр называют *равносторонним*.

Б. Можно провести сечение цилиндра, параллельное его оси (рис. 1.10 б). На этом рисунке сечение MM_1A_1A параллельно оси OO_1 . Это сечение получено в результате пересечения цилиндра плоскостью, проходящей через две образующие. В сечении также получается прямоугольник (обоснуйте этот вывод).

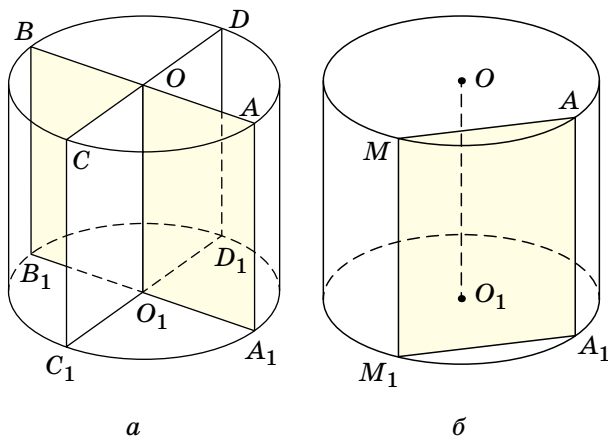


Рис. 1.10

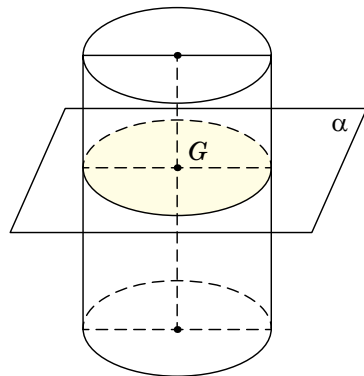


Рис. 1.11

В. Цилиндр можно пересечь плоскостью α , перпендикулярной его оси (рис. 1.11). В этом случае плоскость сечения параллельна плоскостям оснований, а сечением цилиндра является круг, равный каждому из оснований (рис. 1.11) (выводы обоснуйте).

С учётом рассмотренных трёх видов сечений цилиндра можно указать некоторые симметрии цилиндра.

Все осевые сечения цилиндра – равные прямоугольники. Их диагонали проходят через середину G отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра, и делятся этой точкой пополам. Поэтому точка G – центр симметрии цилиндра (рис. 1.12). Обоснуйте этот вывод.

Плоскость, проходящая через точку G перпендикулярно оси цилиндра, является плоскостью его симметрии (рис. 1.11). Остальные плоскости симметрии цилиндра проходят через его ось. Обоснуйте эти выводы.

Г. Если боковую поверхность цилиндра пересечь плоскостью так, чтобы эта плоскость не пересекала его оснований и не была перпендикулярной оси цилиндра, то в сечении получится эллипс – геометрическая фигура, знакомая вам из курса геометрии 10 класса (рис. 1.13а).

Чтобы иметь наглядное представление о таком сечении, налейте воду в стакан и наклоните его (рис. 1.14). Вы видите, что поверхность воды в сечении имеет форму эллипса.

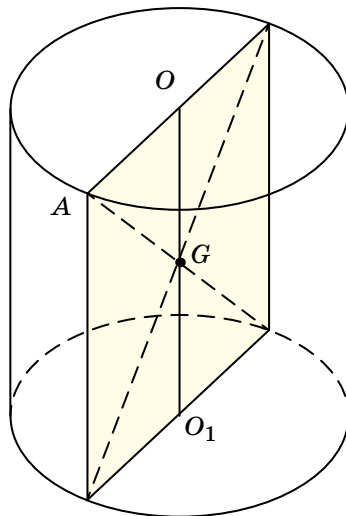
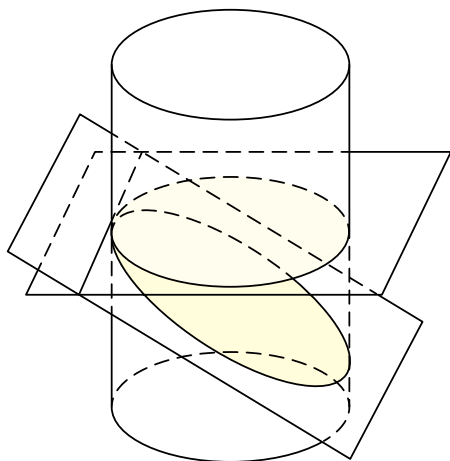
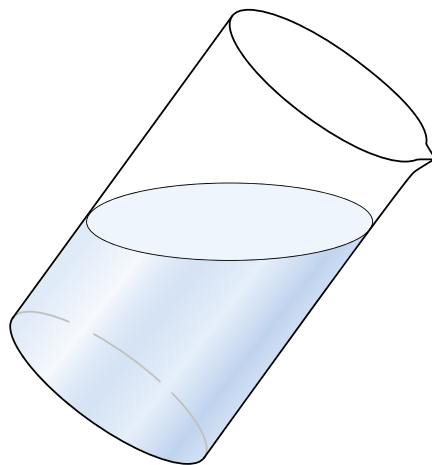


Рис. 1.12



a



б

Рис. 1.13



Как доказать, что сечение цилиндра плоскостью, не перпендикулярной его оси и не пересекающей оснований цилиндра, является эллипсом?

Доказательство

1. Пусть плоскость α пересекает ось OO_1 цилиндра в точке Q (рис. 1.14).

2. Проведём через точку Q плоскость β , перпендикулярную оси OO_1 (построение). Она пересечёт боковую поверхность цилиндра по окружности.

3. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой CD (где точки C и D лежат на боковой поверхности цилиндра), тогда CD – диаметр окружности, являющейся сечением цилиндра плоскостью β .

4. Возьмём на сечении цилиндра плоскостью α произвольную точку N .

5. Пусть образующая, проходящая через точку N , пересекает окружность в точке M .

6. Отрезок MN – перпендикуляр к плоскости β , причём точка M – основание этого перпендикуляра.

7. Проведём из точки M в плоскости β перпендикуляр MK к диаметру CD (построение).

8. По теореме о трёх перпендикулярах $NK \perp CD$, и значит, $\angle NKM$ – линейный угол двугранного угла между плоскостями α и β .

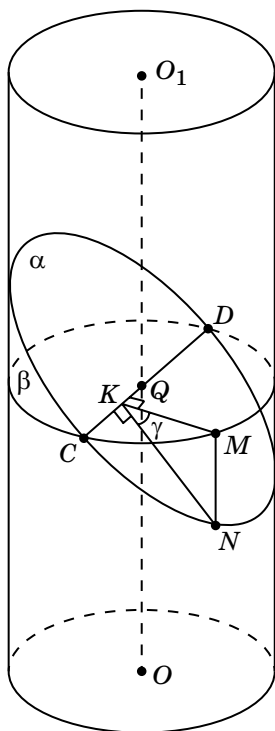


Рис. 1.14

9. Пусть $\angle NKM = \gamma$. Из прямоугольного треугольника NKM имеем:

$$NK = \frac{MK}{\cos \gamma}.$$

10. Последнее равенство можно записать в виде $NK = k \cdot MK$, где обозначено $k = \frac{1}{\cos \gamma}$.

11. Тот факт, что $NK = k \cdot MK$, можно трактовать так, что линия пересечения плоскости α с боковой поверхностью цилиндра получается следующим образом: окружность пересечения плоскости β с боковой поверхностью цилиндра нужно повернуть вокруг диаметра CD на угол γ так, чтобы она оказалась в плоскости α , а затем растянуть её в этой плоскости в k раз в направлении, перпендикулярном диаметру CD .

12. Согласно сказанному в параграфе 5.2 учебника геометрии для 10 класса, это и значит, что рассматриваемая линия – эллипс. ■

Д. Плоскость, которая проходит через образующую цилиндра и не имеет с ним других общих точек, называется *касательной плоскостью цилиндра*, а эта образующая называется *образующей прикосновения* (рис. 1.15). Касательная плоскость перпендикулярна осевому сечению цилиндра, проведённому через образующую прикосновения (рис. 1.15). Обоснуйте этот вывод.

Вопросы, связанные с сечениями цилиндра, могут объяснить некоторые закономерности изображения шара.

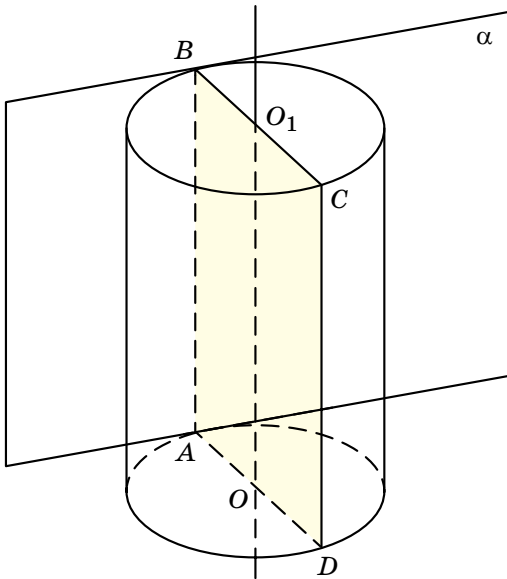


Рис. 1.15

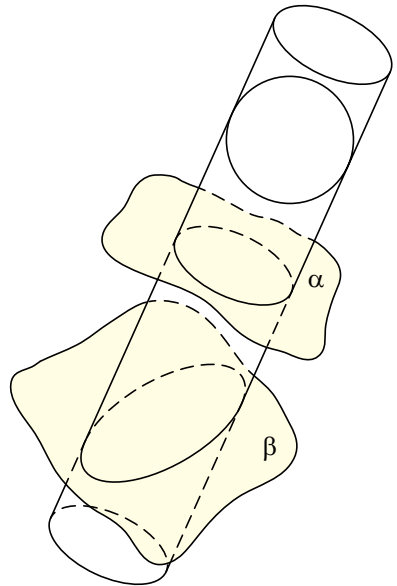


Рис. 1.16

При проектировании шара проектирующие прямые образуют круговую цилиндрическую поверхность, касающуюся сферы. При желании можно считать, что это цилиндр с достаточно длинной образующей, как изображено на рис. 1.16. Плоскость α , перпендикулярная образующим цилиндра, пересекает цилиндр по кругу, а плоскость β – по вытянутому эллипсу (малая ось которого равна диаметру основания цилиндра или, что то же самое, диаметру шара), то есть проекция шара на плоскость α есть круг, а на плоскость β – вытянутый эллипс, малая ось которого равна диаметру шара.

При изображении цилиндров или их комбинаций с другими фигурами возникают свои особенности и закономерности. У прямого кругового цилиндра оба основания – круги, поэтому они изображаются одинаковыми эллипсами.

При решении задач чертёж играет вспомогательную роль, поэтому мы выполняем чертёж на глаз. Дадим некоторые общие рекомендации выполнения таких чертежей:

а) Изображение шара сложнее, чем многогранников, цилиндра и конуса. Поэтому, выполняя чертежи с участием шара, рекомендуем начинать с шара, а затем пристраивать к нему остальные фигуры.

б) Если шар вписан в цилиндр (рис. 1.17), то боковая поверхность цилиндра касается шара по большому кругу, например, по экватору. Точка B – на экваторе, $AB = BC$, $AC = NS$. Все три эллипса (изображающие экваториальное сечение шара и основания цилиндра) одинаковы.

в) Если цилиндр вписан в шар (рис. 1.18), то следует помнить, что его основания – одинаковые по размеру круги, лежащие в параллельных плоскостях.

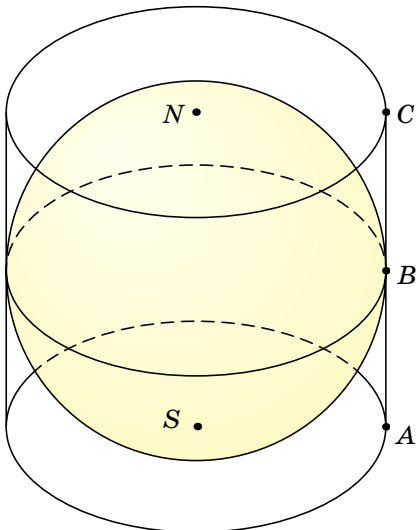


Рис. 1.17

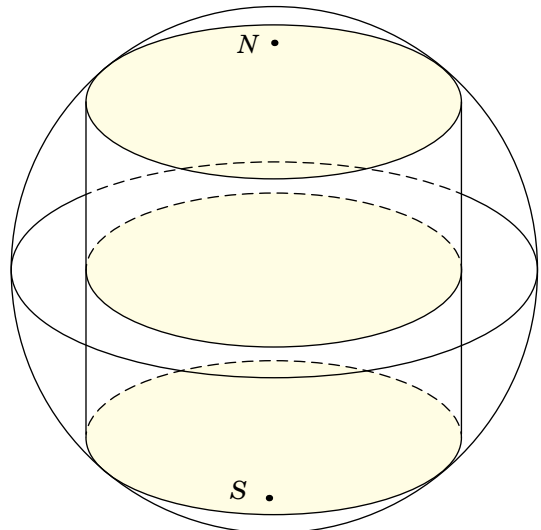


Рис. 1.18



РАЗВЁРТКА ЦИЛИНДРА. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

Ранее мы неоднократно говорилось о развёртках многогранников: куба, пирамиды, призмы*.

Сейчас мы познакомимся с развёрткой цилиндра и площадью поверхности цилиндра.

Представьте себе, что мы разрезали поверхность цилиндра по окружностям оснований и какой-нибудь образующей, а потом развернули на плоскости. Мы получим *развёртку цилиндра* (рис. 1.19). Она состоит

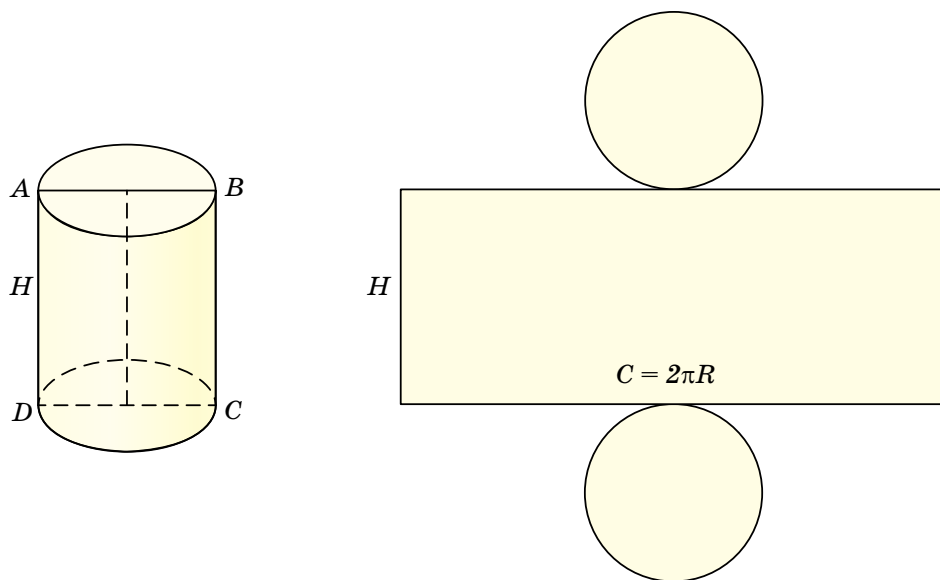


Рис. 1.19

* Геометрия, 7–9 классы, § 2.3, § 3.4, § 4.2, Геометрия, 10 класс, Глава IV.

из прямоугольника – *развёртки боковой поверхности цилиндра*, и двух равных кругов.

Если радиус цилиндра R , а высота H , то его боковая поверхность развёртывается в прямоугольник со сторонами $2\pi R$ и H . Площадь этой развёртки $2\pi RH$ принимают за *площадь боковой поверхности цилиндра*.

Таким образом, мы доказали теорему:

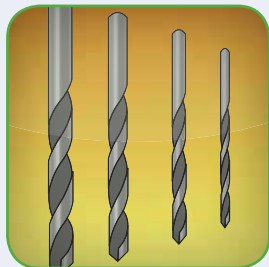
Теорема 1. Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра.

За площадь поверхности цилиндра, или за полную поверхность цилиндра, принимается площадь боковой поверхности, сложенной с удвоенной площадью основания. Она вычисляется по формуле

$$S_{\text{полн. пов. цил.}} = 2\pi RH + 2\pi R^2, \text{ или } S_{\text{полн. пов. цил.}} = 2\pi R(H + R).$$

Развёртку цилиндров часто используют для изготовления предметов цилиндрической формы: труб, ведер, банок. Для этой цели может служить гибкий материал: листовое железо, картон, пластик и др.

§ 1.4*



ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ВИНТОВАЯ ЛИНИЯ



Рассмотрим теперь некоторые применения понятия цилиндра и его развёртки.

Одним из самых важных примеров такого применения в технике и в практике является *цилиндрическая винтовая линия*.

В технических приспособлениях, от самых распространённых до узкоспециальных, не обойтись без болтов, гаек, шурупов и т.д. Край резьбы у них – *винтовая линия* (рис. 1.20).

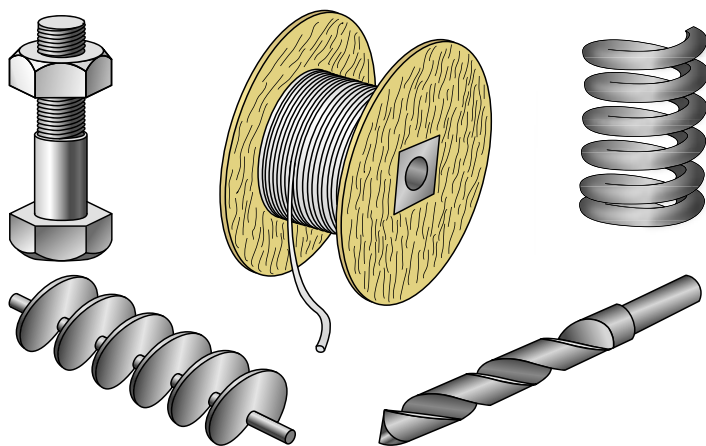


Рис. 1.20

1.4.1 СВОЙСТВА ВИНТОВОЙ ЛИНИИ

Цилиндрическая винтовая линия имеет ряд очень важных и полезных свойств. Одно из этих свойств состоит в том, что её можно перемещать по самой себе без изменения формы.



Что означают слова «перемещать по самой себе без изменения формы»?

Приведём несколько примеров:

- а) Прямой меч плотно, без зазора входит в прямые ножны.
- б) Это же относится и к сабле, изогнутой в форме дуги окружности: её всегда можно вложить в ножны той же кривизны.

Именно это свойство имеют в виду математики, называя иногда прямые и окружности *самосовмещающимися* линиями: при перемещении вдоль самосовмещающейся линии любой её дуги последняя никогда «не сходит с рельсов», то есть в любой момент времени совпадает с соответствующим участком линии (прямой или кривой).



Можно ли придумать «саблю» и «ножны» какой-нибудь другой формы, отличной от отрезка прямой или дуги окружности?

Даже после тщательного размышления многие ответят, что никакой другой формы линии придумать нельзя, но они заблуждаются. Существует третья самосовмещающая кривая – *цилиндрическая винтовая линия*, или *цилиндрическая спираль*. Это кривая, которая, закручиваясь вдоль поверхности цилиндра, пересекает все его образующие под одним и тем же углом.

Рассмотрим пример построения цилиндрической спирали. Посмотрите на рис. 1.21.

Буквой α обозначен постоянный угол, который образует спираль с каждой образующей. Поскольку кривизна во всех точках спирали одинакова, спиральную «саблю» можно без труда ввернуть в спиральные «ножны» и столь же легко вывернуть её обратно.

Полученное выше представление о построении винтовой линии может показаться недостаточно понятным, т.к. там используются понятия угла образующей и кривой, кривизны, про которые мы ничего не знаем.

Можно иначе показать возможность построения винтовой линии.

1. Возьмём цилиндр и точку M на его поверхности (рис. 1.22).

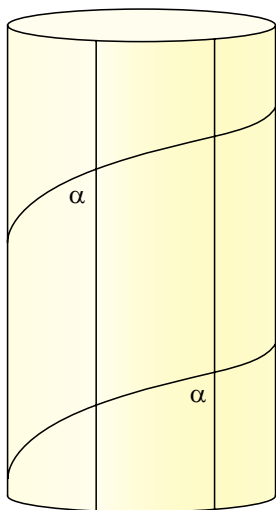


Рис. 1.21

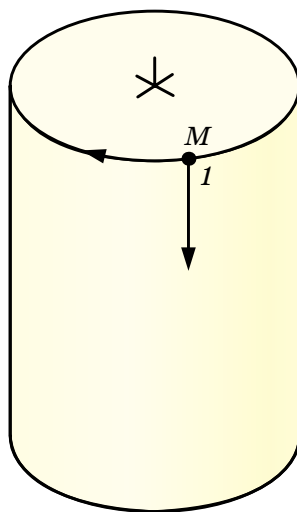


Рис. 1.22

2. Пусть точка M движется равномерно по окружности основания и одновременно тоже равномерно опускается вниз (рис. 1.23а) или поднимается вверх (рис. 1.23б) по образующей.

3. На рис. 1.23 (а, б) точка M , переместившись на $1/12$ окружности основания, передвигается по образующей на 3 мм.

4. В результате сложения этих двух равномерных движений точка M опишет некоторую кривую линию. Эта линия и есть цилиндрическая винтовая линия.

Вторая приведённая трактовка построения винтовой линии тоже достаточно трудна и абстрактна, т.к. мы при этом используем понятие «сложения движений». Рассмотрим ещё один практический способ получения винтовой линии.

1. Бумажный прямоугольный треугольник ABC приклеили катетом AC к поверхности цилиндра и намотали на него.

2. В результате гипотенуза BC разместилась по винтовой линии (рис. 1.24).

3. Сказанное можно сформулировать так: Возьмём прямоугольный треугольник и «навернём» его на карандаш (рис. 1.24а). Гипотенуза этого треугольника образует винтовую линию (рис. 1.24б).

4. Мы получим правую винтовую линию, «навернув» на карандаш треугольник обращённой к нам поверхностью (рис. 1.24в).

5. Если же к карандашу будет прикасаться противоположная поверхность треугольника, то мы получим левую винтовую линию (рис. 1.24г).

6. Итак, мы видим, что есть правая и левая винтовые линии.

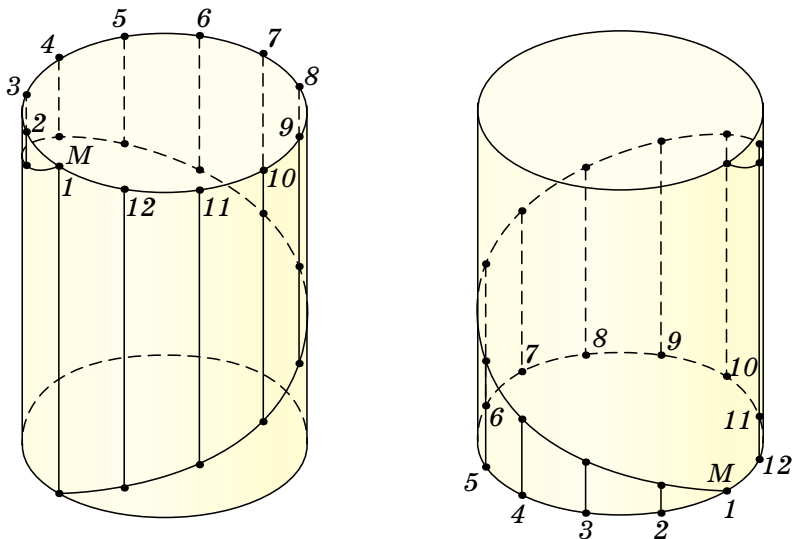


Рис. 1.23

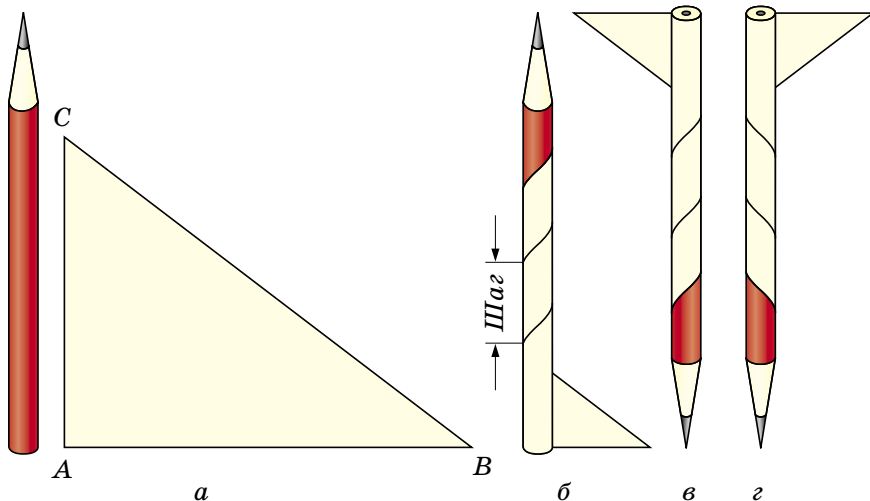


Рис. 1.24

Уточним эти понятия.

Посмотрим на цилиндр со стороны основания в то время, когда точка, двигаясь по винтовой линии, будет удаляться от нас (рис. 1.25, а, б).

Это движение может нам представляться происходящим по часовой стрелке или против неё.

В первом случае мы имеем правую винтовую линию (рис. 1.25а), а во втором случае – левую (рис. 1.25б). В первом случае видимая часть линии поднимается слева направо, а во втором – справа налево.

Большинство винтов, болтов, гаек имеет на своей поверхности правые винтовые линии. Если мы будем завинчивать такой винт, то это вращение будет происходить по часовой стрелке.

Пусть точка M движется по винтовой линии (рис. 1.23). Сделав полный оборот вокруг цилиндра, она поднимется вверх (или опустится вниз) на некоторое вполне определенное расстояние. Подъем точки за один оборот называется *шагом винтовой линии*. Часть винтовой линии, описываемая точкой за один оборот, называется её *витком*.

1.4.2 ВИНТОВАЯ ЛИНИЯ КАК КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ ПО ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

У винтовой линии есть ещё одно важное свойство: она определяет *кратчайший путь на поверхности цилиндра*. Чтобы определить кратчайший путь между двумя точками A и B на поверхности цилиндра, развернём его боковую поверхность и соединим точки A и B отрезком прямой линии. Если точки A и B не лежат на одной образующей или на окружности, параллельной окружности основания, этот отрезок будет представлять некоторую часть винтовой линии и явится кратчайшим путем от точки A к точке B по поверхности цилиндра.

1. Если мы развернём на плоскость боковую поверхность цилиндра с нанесённой на ней винтовой линией, то винтовая линия изобразится в виде прямой линии (диагональ прямоугольника на рис. 1.26).

2. Такой вывод следует из того, что величина подъёма точки пропорциональна её перемещению вдоль окружности.

3. Угол α называется углом подъёма винтовой линии. Его тангенс выражается формулой $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\pi D}$, где h – шаг винтовой линии, а D – диаметр цилиндра (рис. 1.26).

4. Рассматривая эту формулу, мы видим, что при данном диаметре цилиндра величина угла зависит от шага винтовой линии. Чем меньше будет шаг, тем меньше будет угол подъёма винтовой линии.

5. Если же винтовая линия на нескольких цилиндрах имеет один и тот же шаг, то угол подъёма будет тем меньше, чем больше диаметр цилиндра.

Длина одного витка винтовой линии равна $l = \sqrt{h^2 + (\pi D)^2}$.

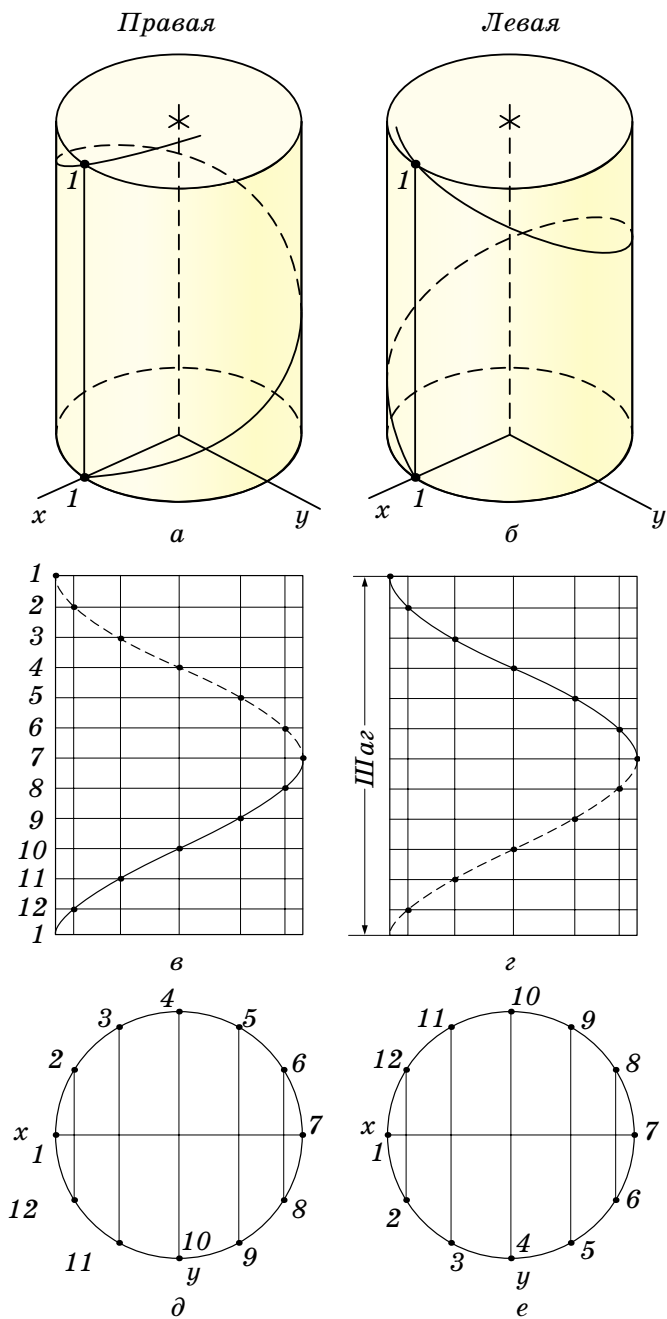


Рис. 1.25

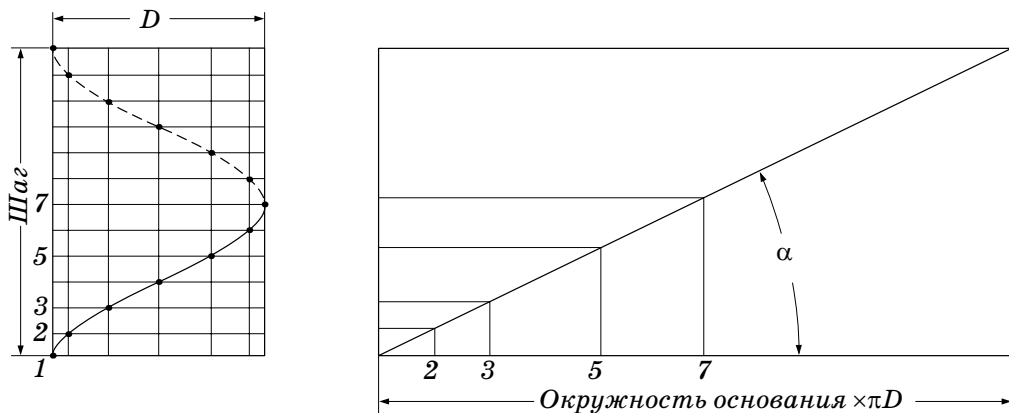


Рис. 1.26

1.4.3 ПРОЕКЦИИ ВИНТОВОЙ ЛИНИИ НА РАЗЛИЧНЫЕ ПЛОСКОСТИ

Горизонтальная проекция винтовой линии совпадает с окружностью, в которую проектируется боковая поверхность цилиндра (рис. 1.25д,е).

Построим фронтальную проекцию винтовой линии (вид спереди).

1. Пусть движение точки начинается на верхнем основании цилиндра в точке I .

2. Разделим шаг винтовой линии, а также окружность основания на одинаковое число равных частей, в данном случае на 12 (рис. 1.25в, г).

3. За полный оборот точка опустится на величину шага. Поэтому за одну двенадцатую часть оборота она опустится на $1/12$ шага (точка 2).

4. Проведём через точки деления шага горизонтальные, а через точки деления окружности вертикальные прямые.

5. Точки фронтальной проекции винтовой линии получатся в пересечении горизонтальных и вертикальных прямых, проходящих через деления шага и окружности с одинаковыми номерами.

6. Фронтальная проекция винтовой линии представляет собой синусоиду. Докажем этот факт.

Начнем с практического опыта*.

– Если обернуть свечу несколько раз листом бумаги, перерезать свечу наклонно острым ножом, затем разнять обе половинки свечи и, наконец, развернуть бумагу, то разрез края бумаги будет образовывать синусоиду.

– Выясним, почему это происходит. Для этого переведем задачу на язык математики.

* Мы воспользуемся примером из книги И.М.Смирновой «Геометрия 10–11». – М.: «Просвещение», 1997 г.

– Представим себе прямоугольник с нарисованными на нем осями координат, параллельными соответствующим сторонам прямоугольника (рис. 1.27).

– Свернём этот прямоугольник в прямой круговой цилиндр, радиус основания которого равен единице.

– При этом ось Ox свернётся в окружность, а ось Oy станет образующей цилиндра.

– Через диаметр OO_1 полученной окружности проведём сечение плоскостью, составляющей с плоскостью окружности угол 45° . Мы знаем, что такое сечение является эллипсом. Его можно получить, нарисовав эллипс на поверхности цилиндра (рис. 1.28а).

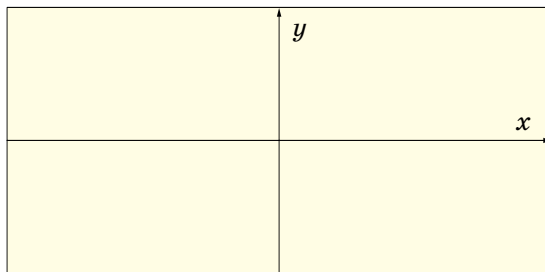


Рис. 1.27

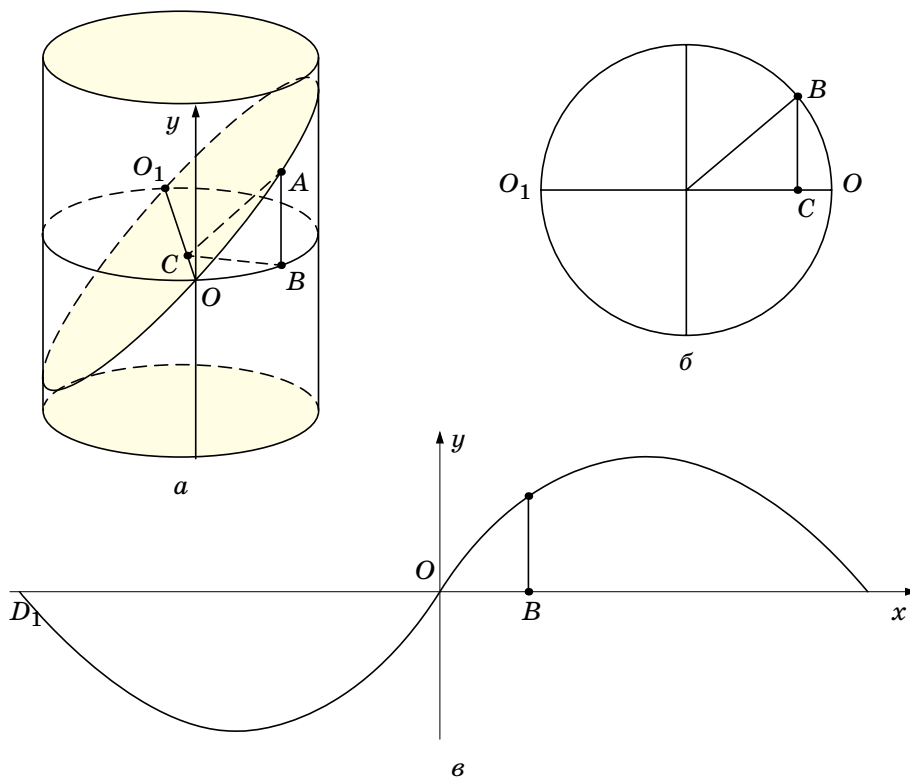


Рис. 1.28

Возьмём какую-нибудь точку A на эллипсе и опустим из неё перпендикуляры на плоскость окружности и выбранный диаметр. Соответствующие точки пересечения обозначим B и C . Треугольник ABC прямоугольный и равнобедренный, так как $AB = 90^\circ$, $\angle C = 45^\circ$. Следовательно, $AB = BC$.

Заметим, что длина отрезка BC равна $\sin x$, где x – величина дуги OB окружности (убедитесь в этом, обратившись к рисунку 1.28б и вспомнив определение синуса). Длина отрезка AB также равна $\sin x$.

Развернём цилиндр обратно в прямоугольник. При этом эллипс перейдёт в кривую, для которой $AB = \sin x$, где $x = OB$ (рис. 1.28в), т.е. эта кривая является частью синусоиды.

Очень наглядно иллюстрирует сказанное следующий пример.

Если на пути параллельных световых лучей, падающих на стену под прямым углом, поместить цилиндрическую спираль, ось которой параллельна стене, то возникшая на стене тень будет синусоидой.

1.4.4

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВИНТОВЫХ ЛИНИЙ

Вокруг нас имеется множество примеров использования винтовой линии и её свойств.

В архитектуре с помощью винтовой линии «сворачивают расстояния»: винтовая лестница занимает в строении меньше места (рис. 1.29).

Наглядное представление о винтовой линии может дать пружина (рис. 1.20). Винтовые линии очень распространены в технике. Винт, болт, гайка, сверло и многие другие предметы (рис. 1.20) содержат на своей поверхности винтовые линии. Резец токарного станка при обработке цилиндрической детали, снимая стружку, описывает на её поверхности винтовую линию.

Винтовая линия с той или иной степенью точности встречается в природе. Стебли вьющихся растений шаг за шагом, виток за витком взбираются по стволу дерева по винтовой линии (рис. 1.30). По ней же смерч скручивает стволы деревьев.

Часто винтовую линию называют винтовой спиралью. В геометрии существует много важных видов спиралей, о которых мы ещё скажем.

Стебли вьющихся растений обычно закручиваются по правой спирали, однако многие разновидности лазающих растений существуют парами, причём стебли растений-партнёров закручиваются в противоположных направлениях. Жимолость, например, всегда закручивается по левой спирали, а вьюнок – по правой.

Каждая спираль, цилиндрическая или же любой другой формы, – это асимметричная пространственная кривая, отличная от своего зеркального отражения. Рассмотрим правовинтовую спираль, например, обычное сверло или штопор. Поднесите к зеркалу такой штопор, и вы увидите, что его отражение, говоря словами Алисы из книги Льюиса Кэрролла, «ведёт себя совершенно наоборот». Штопор в зеркале в отличие от штопора у вас в руке будет левовинтовым.

За исключением винтов, болтов и гаек, которые по стандарту полагается делать правовинтовыми (левовинтовыми их делают лишь для некоторых специальных целей), все остальные спирали, изготовленные человеком, обычно бывают и право- и левовинтовыми – длинные витые конфеты, винтовые лестницы, канаты и кабели, свитые из кручёных шнуров и проводов и т.д.

В конце этого раздела решите самостоятельно следующую задачу-головоломку.

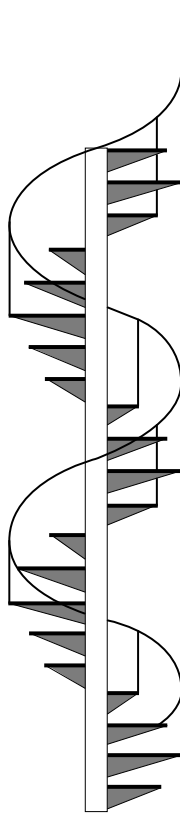


Рис. 1.29

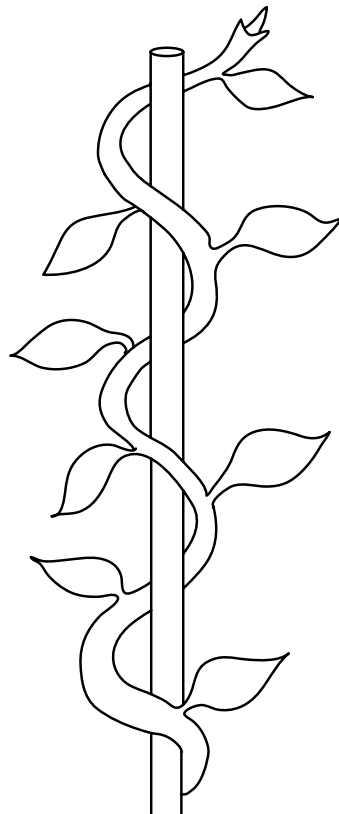


Рис. 1.30

ЗАДАЧА

На боковой поверхности цилиндра нарисована спираль, пересекающая все образующие цилиндра (прямые на поверхности цилиндра, параллельные оси) под постоянным углом 60° . Высота цилиндра равна 120 см. Требуется найти длину спирали.

На первый взгляд кажется, что для определения длины в приведённом условии не хватает данных. На самом же деле при правильном подходе задача решается до смешного просто.

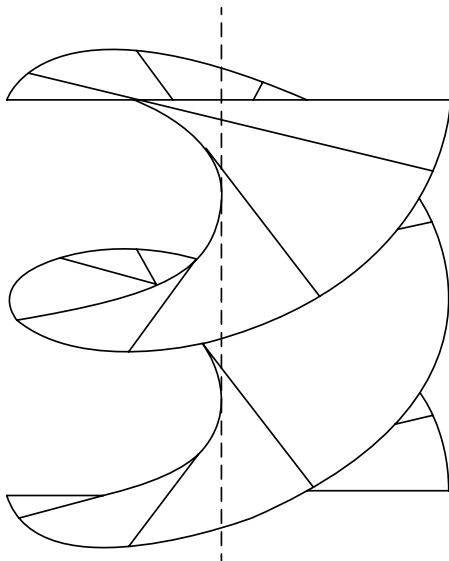


Рис. 1.31

Наряду с винтовой линией рассматриваются так называемые винтовые поверхности. Их описывают дуги плоских кривых, которые, равномерно вращаясь вокруг оси, одновременно равномерно перемещаются вдоль неё же. Лопасть винта корабля, например, является частью винтовой поверхности.

Винтовая поверхность, образованная отрезком прямой, перпендикулярным оси вращения, называется прямым геликоидом («геликоид» переводом с греческого означает «спиралеподобный»). На рис. 1.31 изображена модель прямого геликоида. Другой его моделью является мыльная плёнка, натянутая на проволочную винтовую линию.

§ 1.5



ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЦИЛИНДРЫ

Выше, в § 1.2, мы рассматривали цилиндр, вписанный в шар, и шар, вписанный в цилиндр.

В геометрии часто встречаются другие конфигурации – *цилиндр, вписанный в призму и призма, описанная около цилиндра*. Дадим определения этим конфигурациям. Везде в этом параграфе речь идёт о прямом круговом цилиндре.

Определение 3. Вписанной в цилиндр называется такая призма, основания которой вписаны в основания цилиндра.

На рис. 1.32 призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в цилиндр с осью OO_1 . Основания призмы, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, вписаны в основания цилиндра, круги кр. (O, R) и кр. (O_1, R) , где R – радиус цилиндра.

Призмы, вписанные в цилиндр, являются прямыми призмами (обоснуйте этот вывод).

Определение 4. Описанной около цилиндра называется такая призма, основания которой описаны около оснований цилиндра.

На рис. 1.33 цилиндр с основаниями (O, R) и (O_1, R) (R – радиус цилиндра) вписан в призму $ABCA_1B_1C_1D_1$, при этом окружности (O, R) и (O_1, R) вписаны в четырёхугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

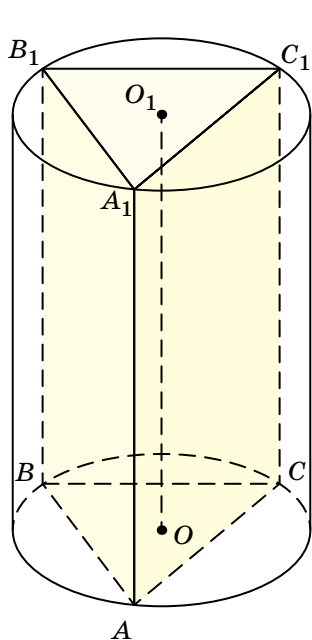


Рис. 1.32

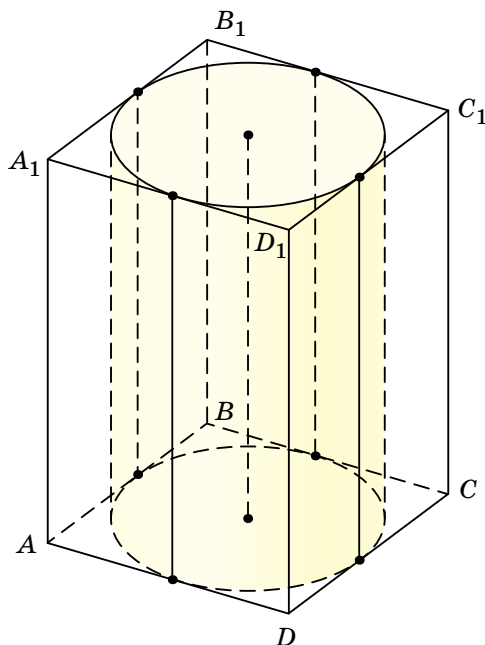


Рис. 1.33

Призмы, описанные около цилиндра, также являются прямыми (обоснуйте этот вывод).

Решим следующие задачи.

ЗАДАЧА 1

Параллельно оси цилиндра на расстоянии 2 см от неё проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу 120° . Найдите площадь сечения, если высота цилиндра равна 10 см.

Решение

1. Цилиндр с осью OO_1 , $OO_1 = 10$ см.
2. AA_1C_1C – сечение, параллельное оси OO_1 .
3. $\angle A_1C_1 = 120^\circ$.
4. Плоскость AA_1C_1C проходит на расстоянии 2 см от оси цилиндра OO_1 .
6. Найдите $S_{AA_1C_1C}$.

} (дано) (рис. 1.34а)

Прежде всего следует понять, какую форму имеет сечение AA_1C_1C . Изучив п.2, получим:

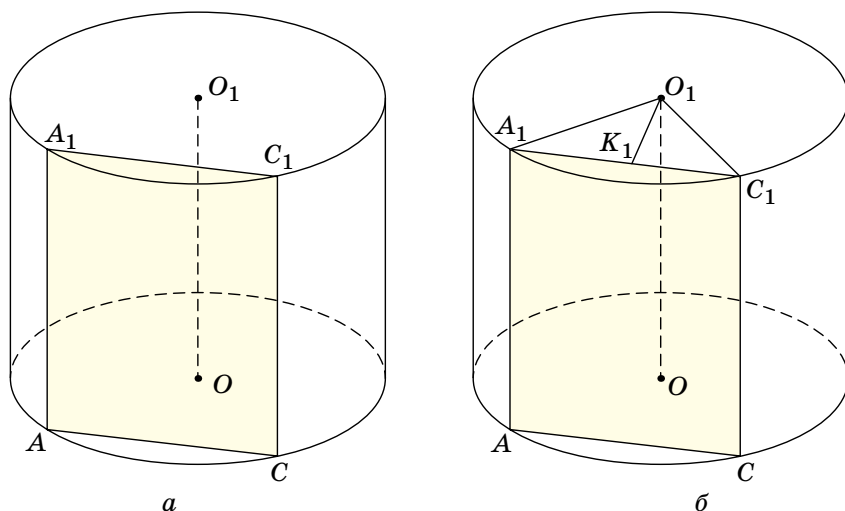


Рис. 1.34

7. Сечение AA_1C_1C параллельно оси OO_1 , значит, $OO_1 \parallel AA_1$ и $OO_1 \parallel CC_1$ (1, 2, свойство прямой, параллельной плоскости).
8. OO_1 перпендикулярна плоскости основания, значит, $A_1A \perp AC$ и $C_1C \perp AC$ (1, 7, свойство прямых, перпендикулярных плоскости).
9. AA_1C_1C – прямоугольник (2, 8, определение прямоугольника).
10. $S_{AA_1C_1C} = A_1C_1 \cdot AA_1 = 10 A_1C_1$ (1, 9, формула площади прямоугольника).

Нам нужно найти A_1C_1 , а для этого:

11. Соединим точки O_1 и A_1 , O_1 и C_1 и проведём высоту $O_1K_1 \perp O_1A_1C_1$ (построение) (рис. 1.34б).

12. $O_1K_1 = 2$ см (требуется доказать).

Мы хотим доказать, что длина отрезка O_1K_1 есть расстояние от прямой OO_1 до плоскости AA_1C_1C , т.е. что высота $\triangle O_1A_1C_1$ совпадает с нужным нам расстоянием.

13. Точка O_1 принадлежит отрезку OO_1 (1).

14. Точка K_1 принадлежит плоскости AA_1C_1C (11).

15. Плоскость плоскости $O_1A_1C_1$ перпендикулярна плоскости AA_1C_1C (1, 2, определение перпендикулярных плоскостей).

16. O_1K_1 принадлежит плоскости $O_1A_1C_1$ (11).

17. O_1K_1 расстояние от прямой OO_1 до плоскости сечения (13, 14, 15, 16, Т. 78 о перпендикулярных плоскостях).

18. $O_1K_1 = 2$ см (17).

19. Так как дуга $A_1C_1 = 120^\circ$, то хорда A_1C_1 является стороной правильного треугольника, вписанного в основание цилиндра, а O_1K_1 – радиус вписанной в него окружности.

Тогда $A_1C_1 = 2 O_1K_1 \sqrt{3}$, или $A_1C_1 = 2 \cdot 2 \sqrt{3} = 4 \sqrt{3}$ см (1, 3, свойства правильного треугольника).

20(6). $S_{AA_1C_1C} = 10 \cdot 4 \sqrt{3} = 40 \sqrt{3}$ см² (8, 16).

ЗАДАЧА 2

В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найдите угол между диагональю её боковой грани и осью цилиндра, если радиус основания равен высоте цилиндра.

Решение

1. Правильная шестиугольная призма вписана в цилиндр, OO_1 – ось цилиндра.

2. Радиус основания цилиндра R равен высоте цилиндра, $R = OO_1$.

3. AB_1 – диагональ грани призмы.

4. Найдите угол между диагональю AB_1 и осью OO_1 (требуется найти).

Какие выводы можно сделать из пунктов 1 и 2?

5. Образующие цилиндра равны боковым рёбрам призмы и равны высоте цилиндра (1, свойства правильной шестиугольной призмы, вписанной в цилиндр).

6. $AB = A_1B_1 = R = OO_1$ (1, 2, 3, свойство правильного шестиугольника, вписанного в окружность).

7. ABB_1A_1 – квадрат (6, определение квадрата).

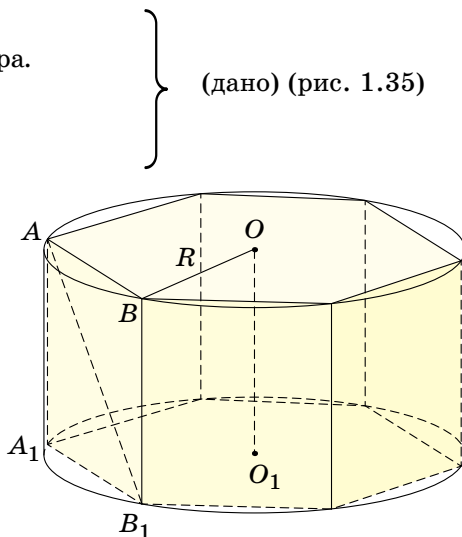


Рис. 1.35

Нам нужно найти угол между диагональю AA_1 и осью OO_1 . Эти отрезки принадлежат скрещивающимся прямым, а значит, нам нужно найти угол между двумя скрещивающимися прямыми. Как это можно сделать?

8. Правило построения угла между скрещивающимися прямыми подсказывает, что $\angle AB_1B$ – искомый (1, 3, 5, угол между скрещивающимися прямыми).

9. $\angle AB_1B = 45^\circ$ (3, 7, 8, свойство диагонали квадрата).

РАЗВИВАЕМ УМЕНИЯ

ЗАДАЧИ К §§ 1.1–1.2

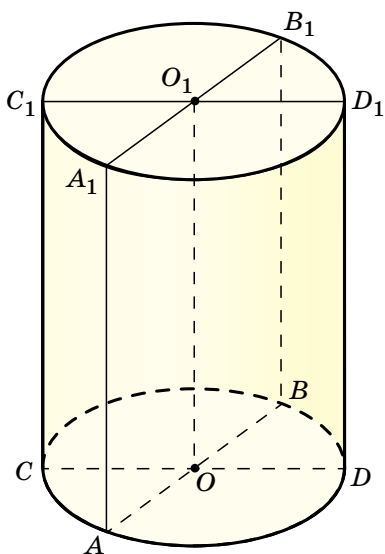


Рис. 1.36

- 1 На рис. 1.36 изображён цилиндр.
 - а) Какие отрезки являются образующими цилиндра?
 - б) Какой отрезок является высотой цилиндра?
 - в) Какой отрезок принадлежит оси цилиндра?
 - г) Укажите равные отрезки на этом рисунке.
- 2 Какая фигура получится при вращении прямоугольника вокруг одной из его сторон?
- 3 Вращением какого прямоугольника вокруг одной из его сторон получен цилиндр, изображённый на рис. 1.36?
- 4 Цилиндр катится по некоторой плоскости. Какую фигуру образует при этом ось цилиндра?



- 5** Какая фигура получается в сечении цилиндра плоскостью:
- а) параллельной оси цилиндра;
 - б) параллельной основаниям цилиндра;
 - в) не параллельной ни оси, ни основаниям цилиндра и не пересекающей основания цилиндра?

- 6** Какую форму имеет осевое сечение цилиндра?
- 7** Какую форму имеет сечение наклонного цилиндра плоскостью, параллельной оси?
- 8** Как должны быть расположены две равные окружности, чтобы через них можно было провести цилиндрическую поверхность?
- 9** Каково взаимное расположение двух плоскостей, касательных к цилиндру?
- 10** Можно ли вращением произвольного параллелограмма вокруг одной из его сторон получить цилиндр?
- 11** Даны три точки на окружности основания цилиндра. Постройте его ось.
- 12** Сколько существует плоскостей, рассекающих данный цилиндр:
а) на два равных цилиндра; б) на две равные фигуры?
- 13** а) Имеет ли цилиндр центр симметрии?
б) Сколько осей и плоскостей симметрии имеет цилиндр?
- 14** Какова форма сечения цилиндра плоскостью, наклонной к оси и пересекающей все образующие?

Н

- 15** а) Образующая произвольного цилиндра в два раза больше его высоты. Под каким углом наклонена образующая к плоскости основания?
б) Высота произвольного цилиндра равна его образующей. Какой вывод можно сделать из этого условия?
- 16** Дан цилиндр радиусом основания 4 м и высотой 6 м. Найдите диагональ осевого сечения цилиндра.
- 17** Дан цилиндр радиусом основания 3 см, диагональ осевого сечения равна 8 см. Найдите: а) высоту цилиндра; б) площадь осевого сечения цилиндра.
- 18** Докажите, что площади двух сечений цилиндра, параллельных его оси, относятся между собой как хорды, по которым пересекают основание цилиндра.
- 19** Как относятся площади сечений цилиндра плоскостями, проходящими через его образующую, если угол между этими плоскостями 30° , а одна из них проходит через ось цилиндра?

- 20** Радиус цилиндра r , а высота h . Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, перпендикулярной основанию и отсекающей от окружности основания дугу в 60° .
- 21** Докажите, что плоскость, проходящая через образующую цилиндра, но не касательная к нему, пересекает цилиндр по прямоугольнику.
- 22** Площадь осевого сечения цилиндра равна 8 м^2 , площадь основания 12 м^2 . Вычислите площадь сечения, параллельного оси и отстоящего от неё на 1 м .
- 23** Радиус цилиндра R , высота H , площадь сечения, параллельного оси, равна S . На каком расстоянии от оси находится плоскость сечения?

П

- 24** Точка M принадлежит основанию цилиндра, а точка N — его оси. Постройте точки пересечения прямой MN с боковой поверхностью цилиндра (или с её продолжением).
- 25** Точки A , B и C принадлежат различным образующим цилиндра. Постройте точку пересечения плоскости ABC с какой-либо образующей (или с её продолжением), не проходящей через данные точки.
- 26** Докажите, что касательная плоскость к цилиндру перпендикулярна плоскости, проходящей через образующую прикосновения и через ось цилиндра.
- 27** Докажите, что две непараллельные плоскости, касающиеся цилиндра, пересекаются по прямой, параллельной оси цилиндра.
- 28** Высота цилиндра h , диаметр основания d ($h < d$). На каком расстоянии от оси нужно провести плоскость, чтобы сечением цилиндра являлся квадрат?
- 29** В основание цилиндра вписан треугольник ABC . Докажите, что основания перпендикуляров, проведенных из точки M боковой поверхности цилиндра к прямым AB , BC и CA , принадлежат одной прямой.
- 30** Два цилиндра внешне касаются (имеют общую образующую). Докажите, что отрезок внешней касательной к ним делится пополам плоскостью, касательной к цилиндрам по их линии касания.

31 Отрезок одним из своих концов скользит по окружности, оставаясь перпендикулярным её плоскости. Какая фигура при этом получится?

32 Определите, каким движением прямой может быть образована цилиндрическая поверхность.

33 На рис. 1.37 изображён цилиндр. Объясните по чертежу, как построена ось этого цилиндра.

34 Докажите, что двугранный угол, ребром которого служит образующая цилиндра и грани которого проходят через две образующие цилиндра, равен половине двугранного угла, ребром которого служит ось цилиндра и грани которого проходят через те же образующие.

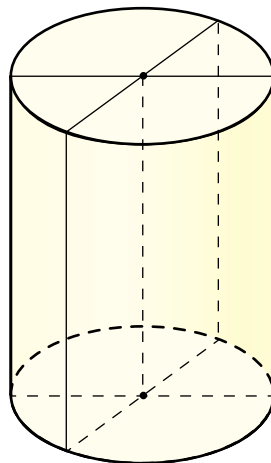


Рис. 1.37

35 Стороны равнобедренной трапеции касаются цилиндра, ось которого перпендикулярна параллельным сторонам трапеции. Найдите угол между плоскостью трапеции и осью цилиндра, если основания трапеции равны a и b ($a > b$), а её высота равна h .

36 В пространстве даны окружность и точка. Определите, где должна лежать эта точка, чтобы через неё и данную окружность можно было провести цилиндрическую поверхность.

37 Докажите, что все отрезки, соединяющие центр одного основания цилиндра с точками окружности другого основания, равны.

38 Прямая имеет с цилиндрической поверхностью: а) больше двух общих точек; б) только две общие точки. Чем она является для этой поверхности?

39 Плоскость, проходящая через ось цилиндра перпендикулярно к плоскости, касающейся цилиндра, проходит через образующую прикосновения касательной плоскости. Докажите эти утверждения. Верны ли обратные утверждения?

40 Сравните двугранный угол, ребро которого лежит на поверхности цилиндра, а грани пересекают поверхность цилиндра по двум образующим, и двугранный угол, ребро которого совпадает с одной из этих образующих, одна из граней проходит через другую образующую, а другая грань является касательной плоскостью к цилиндру.

41 Через данную образующую цилиндра проведите плоскость, касающуюся цилиндра.

Н

- 42** Диагональ развёртки боковой поверхности цилиндра, равная d , образует с высотой развёртки угол α . Найдите площади основания и осевого сечения цилиндра.
- 43** Определите, какие размеры должен иметь прямоугольный лист кровельного железа для изготовления водосточной трубы длиной 140 см и диаметром 10 см. (На шов добавьте 2 см).
- 44** Отношение диаметра основания к высоте цилиндра равно $m : n$, площадь полной поверхности цилиндра равна Q . Найдите площадь осевого сечения цилиндра.
- 45** Площадь полной поверхности цилиндра равна S , диагональ осевого сечения составляет угол α с плоскостью основания. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

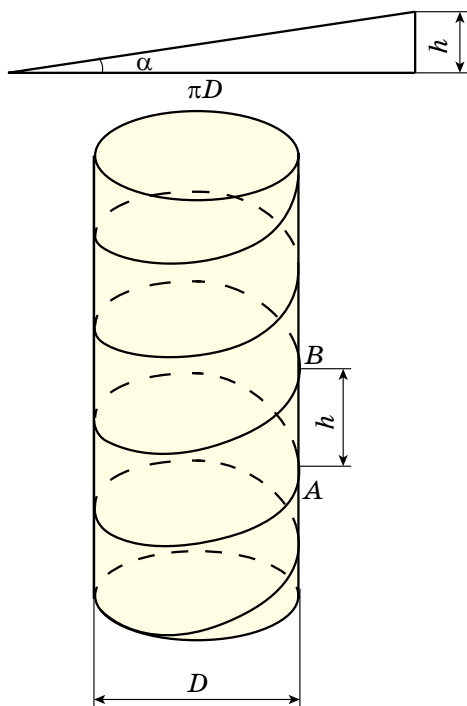


Рис 1.38

- 46** Диагонали осевого сечения цилиндра образуют угол φ , площадь основания равна Q . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
- 47** На цилиндрический стержень диаметром D навёрнут вырезанный из бумаги прямоугольный треугольник с катетами h и πD (рис. 1.38). Гипотенуза при этом образует неплоскую кривую, которую называют витком винтовой линии. Катет h называют шагом, угол α , противолежащий этому катету (в прямоугольном треугольнике), — углом подъёма винтовой линии.
- Цилиндрический стержень диаметром D имеет винтовую резьбу, шаг которой равен h . Найдите угол α подъёма резьбы и длину l n витков резьбы. Вычислите α и l при $D = 24$ мм, $h = 2$ мм.

- 48** Диагональ осевого сечения цилиндра равна a . Найдите радиус основания и высоту цилиндра с наибольшей площадью: а) боковой поверхности; б) полной поверхности.
- 49** Сколько квадратных метров жести израсходовано на изготовление 1 млн консервных банок диаметром 10 см и высотой 5 см (на швы и отходы добавьте 10% материала)?
- 50** Диагональ развёртки боковой поверхности цилиндра равна d и образует угол α с основанием развертки.
а) Найдите площадь полной поверхности цилиндра.
б) Вычислите угол α , при котором для заданного d полная поверхность цилиндра имеет наибольшее значение.
- 51** Два цилиндра, высоты которых a и b , имеют равные развёртки боковых поверхностей. Найдите отношение a/b , при котором площадь полной поверхности одного цилиндра вдвое больше площади поверхности другого.
- 52** Площадь поверхности и площадь боковой поверхности цилиндра равны 50 см^2 и 30 см^2 . Найдите радиус и высоту цилиндра.
- 53** Из квадрата, площадь которого Q , свёрнута боковая поверхность цилиндра. Найдите площадь основания цилиндра.
- 54** Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если его радиус r , а образующая из центра основания видна под углом α .
- 55** Найдите площадь поверхности цилиндра, если диаметр одного его основания равен d и из центра другого основания виден под углом α .
- 56** Диагональ развёртки боковой поверхности цилиндра, равная d , образует с высотой развёртки угол α . Найдите площади основания и осевого сечения цилиндра.

П

- 57** На листе бумаги, являющимся квадратом $PQML$, прорезано отверстие – равносторонний треугольник ABC – так, что $AB \parallel PL$ и $AB : PL = 1 : 2$. Затем квадрат свёрнут в круглую цилиндрическую поверхность, ось которой перпендикулярна отрезку AB . Найдите отношение площади квадрата к площади треугольника ABC , вершины которого лежат на цилиндрической поверхности.
- 58** Площадь осевого сечения цилиндра равна Q . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

- 59** Хорда длиной a стягивает в основании цилиндра дугу φ . Высота цилиндра H . Найдите площадь полной поверхности цилиндра.
- 60** Цилиндрический паровой котёл имеет диаметр 1 м, длина котла равна 3,8 м, давление пара 10 атм. Найдите силу давления пара на поверхность котла.

ЗАДАЧИ К § 1.5

Н



- 61** а) Можно ли описать цилиндр вокруг прямой треугольной призмы?
б) Можно ли вписать цилиндр в прямую треугольную призму?
- 62** При каком условии можно описать круговой цилиндр вокруг прямой четырёхугольной призмы?
- 63** В прямой цилиндр вписана треугольная призма, одна из боковых граней которой проходит через ось цилиндра. Как расположены друг относительно друга две другие её боковые грани?
- 64** Чему равна сумма противоположных двугранных углов произвольной четырёхугольной призмы, вписанной в цилиндр?
- 65** Докажите, что во всякой четырёхугольной призме, описанной вокруг цилиндра, суммы площадей противоположных боковых граней равны.

Н

- 66** а) В цилиндр радиусом R и высотой H вписана правильная четырёхугольная пирамида так, что её основание вписано в одно из оснований цилиндра, а вершина принадлежит другому основанию. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
б) Составьте и решите аналогичную задачу для пирамиды, основанием которой служит правильный треугольник и одно из боковых рёбер является высотой.
- 67** В шар, радиус которого R , вписан цилиндр с наибольшей боковой поверхностью. Найдите радиус основания цилиндра.

П

- 68** Около шара описан цилиндр. Шар меньшего радиуса касается плоскости основания цилиндра, его боковой поверхности и данного шара. Найдите отношение радиусов шаров. Сколько шаров меньшего радиуса помещается внутри цилиндра, но вне шара при одном из оснований цилиндра?
- 69** В шар вписан равносторонний цилиндр. В каком отношении делят поверхность шара основания цилиндра?
- 70** В шар вписан цилиндр, у которого радиус основания относится к высоте как $m : n$. Определите полную поверхность цилиндра, если поверхность шара равна S .
- 71** В цилиндрический сосуд, радиус основания которого $R = 4$ см, помещён шар радиуса 3 см. В сосуд наливается вода так, что свободная поверхность её касается поверхности шара и шар при этом не всплывает. Определите толщину слоя воды, который получится, если шар из сосуда вынуть.
- 72** Из цилиндра диаметром 12 см и высотой 1 см выточен шар наибольшего диаметра. Сколько процентов материала пошло в отходы?
- 73** Около равностороннего цилиндра описана сфера. Найдите площадь сферы, если площадь полной поверхности цилиндра равна Q .
- 74** В шар вписан цилиндр. Известно, что площадь поверхности шарового пояса, заключённого между основаниями цилиндра, равна сумме площадей этих оснований. Найдите градусную меру дуги в осевом сечении пояса.
- 75** Внутри цилиндра лежат два шара радиуса r и один шар радиуса $\frac{5}{2}r$ так, что каждый шар касается двух других, одного и того же основания цилиндра и его боковой поверхности. Найдите радиус основания цилиндра.
- 76** Внутри цилиндра высотой $3a$ помещены три одинаковых шара радиуса a так, что каждый касается двух других и боковой поверхности цилиндра, причём два шара касаются нижнего основания, а третий – верхнего. Найдите радиус основания цилиндра.

М

- 77** Докажите самостоятельно, что:
- а) центр сферы, вписанной в равносторонний цилиндр, и центр сферы, описанной около него, совпадают и лежат на середине оси цилиндра;

- б) боковая поверхность равностороннего цилиндра равна площади поверхности вписанного в него шара;
- в) отношение объёма равностороннего цилиндра к объёму вписанного в него шара равно $3 : 2$;
- г) отношение площади полной поверхности равностороннего цилиндра к площади поверхности вписанного в него шара равно $3 : 2$;
- д) центр сферы, вписанной в равносторонний цилиндр, является центром симметрии цилиндра;
- е) центр сферы, описанной около любого цилиндра, является центром симметрии цилиндра.

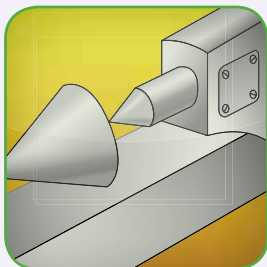
- 78** Докажите, что если шар касается боковой поверхности прямого кругового цилиндра и некоторая плоскость проходит через ось цилиндра и центр шара, то она содержит точку касания.
- 79** На плоскости лежит прямой круговой цилиндр радиусом R и, не пересекаясь с ним, лежит шар радиусом r . Расстояние от оси цилиндра до центра шара равно p . Найдите минимальный возможный радиус шара, который касается одновременно цилиндра, плоскости и заданного шара.
- 80** На плоскости лежит шар радиусом R . Эту же плоскость пересекает прямой круговой цилиндр радиусом r , причем образующие цилиндра перпендикулярны к плоскости. Центр шара удалён от оси цилиндра на расстояние $p > R + r$. Найдите минимально возможный радиус шара, который касается одновременно цилиндра, плоскости и заданного шара.

ГЛАВА 2

КОНУС

Рано или поздно всякая правильная математическая идея
находила применение в том или ином деле.
Алексей Николаевич Крылов
(русский математик и кораблестроитель, 1863–1945)

§ 2.1



КОНУС КАК ФИГУРА ВРАЩЕНИЯ

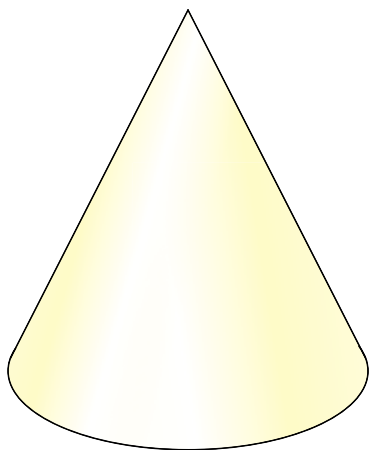


Рис. 2.1

Определим ещё одну замечательную геометрическую фигуру – *конус* (рис. 2.1).

Мы уже встречались с этой фигурой, когда в 8 классе изучали свойства пересекающихся прямых и рассматривали некоторые свойства конуса*.

В этом параграфе мы будем изучать свойства конуса как фигуры вращения.

Пусть нам дан прямоугольный треугольник M (рис. 2.2а). Если этот прямоугольный треугольник вращать вокруг оси l , содержащей катет треугольника, то в результате этого вращения мы получим фигуру вращения – *конус* (рис. 2.2б).

Определение 5. Конусом называется фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей один из катетов этого треугольника.

На рис. 2.3 конус получен при вращении треугольника PAO с прямым углом O вокруг прямой, содержащей катет PO . Используя этот рисунок и имеющиеся у нас знания, можно доказать следующие свойства конуса.

* Первое представление о конусе было дано в учебнике геометрии для 7–9 классов: параграф 7.2. «Конус. Развёртка конуса» (стр. 86–88).

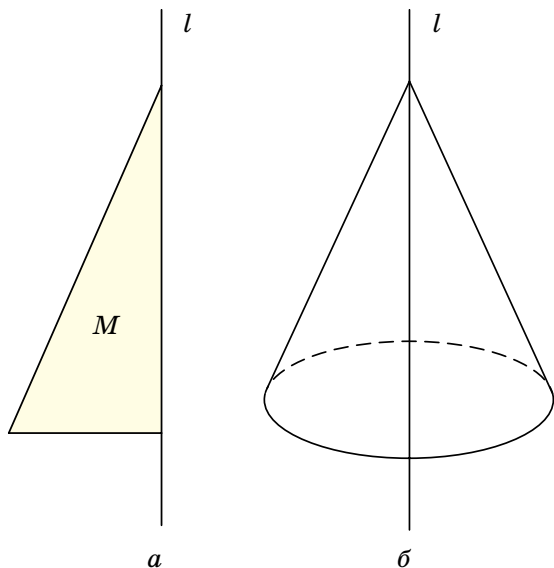


Рис. 2.2

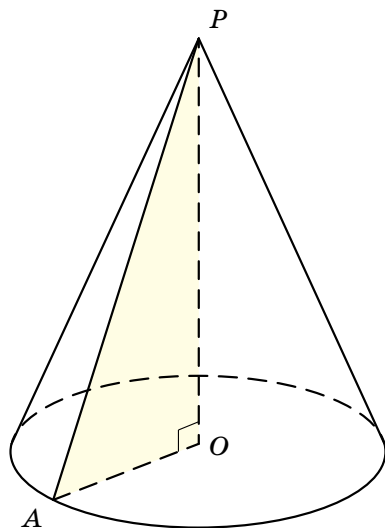


Рис. 2.3

1. Катет OA при этом вращении образует круг, который называется *основанием конуса*.

2. Плоскость основания конуса перпендикулярна оси вращения PO , $\angle POA = 90^\circ$. Тем самым мы можем определить *высоту конуса*.

Определение 6. *Высотой конуса* называется перпендикуляр, проведённый из его вершины к плоскости основания.

Докажите самостоятельно, что высотой конуса является отрезок PO , соединяющий его вершину с центром основания (рис. 2.3).

3. Гипотенуза PA при вращении вокруг оси образует *боковую поверхность конуса*. Отрезки, соединяющие любую точку окружности основания с точкой P – вершиной конуса, равны как наклонные, имеющие равные проекции. Эти отрезки называются *образующими конуса*. Боковая поверхность конуса называется также *конической поверхностью*.

Конус, который мы определили, называется *прямым круговым конусом*. У такого конуса основанием всегда является круг, а основание высоты конуса попадает всегда в центр этого круга – основания конуса.

На рис. 2.4 мы видим не прямой круговой конус, но такие конусы в школьном курсе геометрии практически не рассматриваются (конус на рис. 2.4 не является фигурой вращения).

Выше мы говорили о конической поверхности, но там это была просто боковая поверхность кругового конуса. Вместе с тем понятие конической поверхности шире, чем понятие боковой поверхности кругового конуса.

Напомним, что такое коническая поверхность. Пусть даны плоская линия C и точка S , не лежащая в её плоскости. Фигура, образованная прямыми, проходящими через данную точку S и пересекающими данную линию C , называется *конической поверхностью* (рис. 2.5).

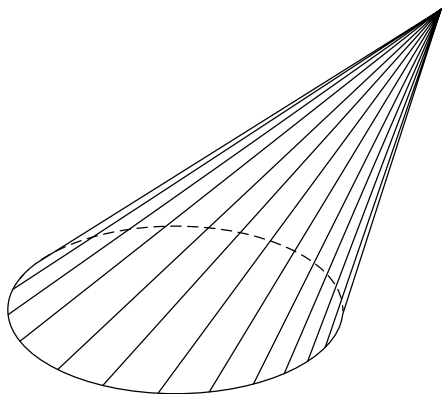


Рис. 2.4.

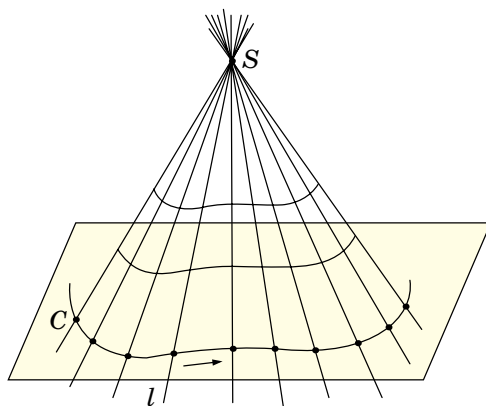


Рис. 2.5.

Точка S называется *вершиной*, прямая l – *образующей*, а линия C – *направляющей* конической поверхности.

На рис. 2.6 направляющей является замкнутая ломаная $ABCDE$ (мы изображаем часто только одну часть конической поверхности, другая часть располагается симметрично относительно точки S). Вы видите, что при этом получен многогранный угол $SABCDE$, который можно считать частным случаем конической поверхности. Пирамиду можно рассматривать как частный случай конуса.

На рис. 2.7 направляющей является окружность, и мы получаем круговую коническую поверхность (её можно называть конической поверхностью вращения).

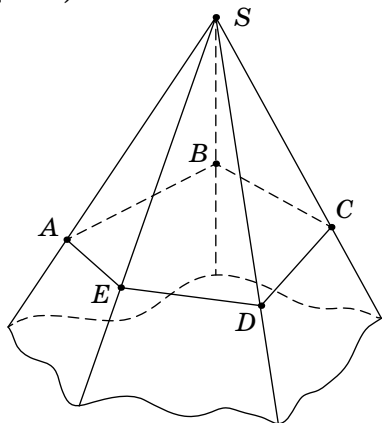


Рис. 2.6.

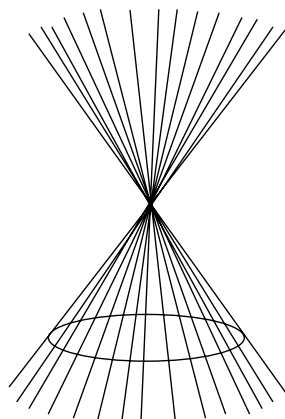


Рис. 2.7.



СЕЧЕНИЯ КОНУСА ПЛОСКОСТЬЮ

Поставим такой общий вопрос:



Каким может быть взаимное расположение конуса и плоскости? В каких случаях можно говорить о сечении конуса плоскостью?

Конус и плоскость могут:

- а) не иметь общих точек (рис. 2.8а);
- б) иметь одну общую точку – вершину конуса (рис. 2.8б);
- в) иметь одну общую точку, лежащую на окружности основания (рис. 2.8в);
- г) иметь в пересечении основание конуса (конус стоит на плоскости) (рис. 2.8г);
- д) иметь в пересечении образующую (рис. 2.8д), в этом случае мы говорим, что плоскость *касается конуса* или является *касательной плоскостью*;
- е) иметь в пересечении часть конуса (не образующую, не точку и не основание конуса).

При этом плоскость может проходить через вершину конуса или не проходить через неё.

В случаях а) – д) мы не говорим о сечении конуса плоскостью. Только в случае е) мы получаем различные сечения. Рассмотрим этот случай подробнее.

1. Плоскость сечения проходит через две образующие конуса.

Через две прямые, на которых лежат какие-нибудь две образующие конуса, можно провести единственную плоскость α (обоснуйте этот вывод). Эта плоскость пересечёт основание конуса по хорде, а боковую поверхность – по двум образующим. Общей частью этой плоскости и конуса является равнобедренный треугольник (объясните этот вывод). Если плоскость α проходит через ось конуса, то полученный в сечении треугольник называется *осевым сечением конуса*. Его сторонами являются две образующие конуса и диаметр основания.

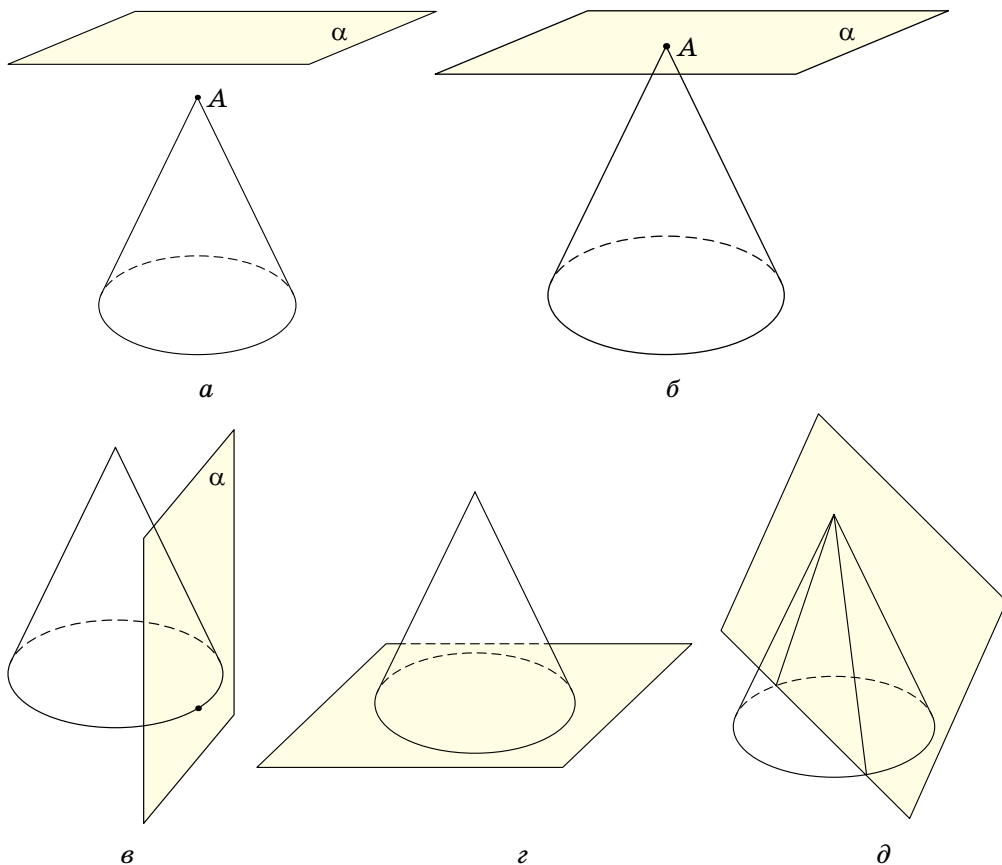


Рис. 2.8

На рис. 2.9а треугольник SAB – осевое сечение, а на рис. 2.9б треугольник SAB осевым сечением не является.

Определение 7. Конус называется *равносторонним*, если его осевое сечение – равносторонний треугольник.

При изображении конуса возникают свои трудности. Основание конуса всегда изображается эллипсом. Можно поставить такой необычный вопрос:



На рис. 2.10 изображено осевое сечение конуса. Всё ли правильно на этом рисунке?

На этом рисунке крайние образующие используются для изображения осевого сечения, причём предполагается, что они касаются эллипса в кон-

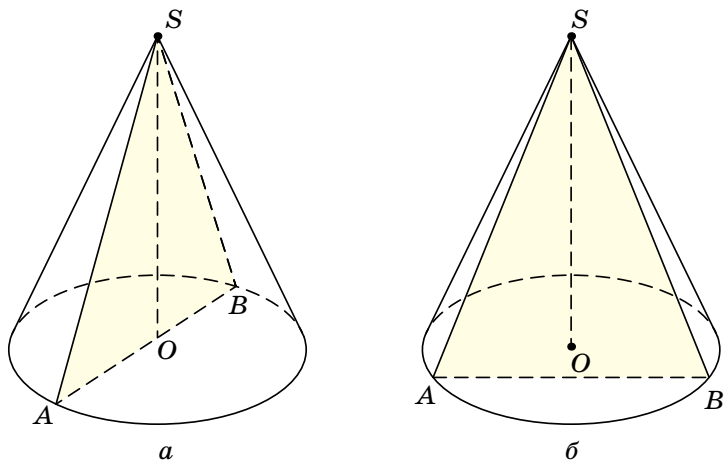


Рис. 2.9

цах большой оси. Это грубая ошибка, которая тем не менее часто встречается в литературе для школьников.

Если из точки S провести касательные к эллипсу и соединить точки касания A и B , то прямая AB не пройдет через центр эллипса. Рис. 2.11а – правильный. Одна из точек касания, например A , соединяется с центром O , и на эллипсе отмечается точка C , диаметрально противоположная A . Треугольник SAC есть изображение осевого сечения.

Для изображения осевого сечения вовсе не обязательно использовать одну из крайних образующих. На рис. 2.11б показан другой вариант изображения конуса с осевым сечением.

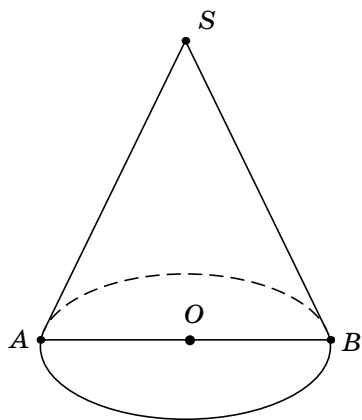


Рис. 2.10

II. Докажем теорему о сечении конуса плоскостью, параллельной плоскости его основания. При этом нам понадобится дополнительные сведения о подобии фигур в пространстве, которые мы сейчас приведем.

В пространстве, как и на плоскости, фигура F_1 называется подобной фигуре F с коэффициентом подобия $k > 0$, если можно так сопоставить их точки, что $X_1Y_1 = kXY$ для любых точек X и Y фигуры F и соответствующих им точек X_1 и Y_1 фигуры F_1 (рис. 2.12).

Теорема 2. Сечение конуса плоскостью, параллельной плоскости его основания, подобно основанию. Коэффициент подобия равен отношению высоты отсеченного конуса к высоте данного конуса.

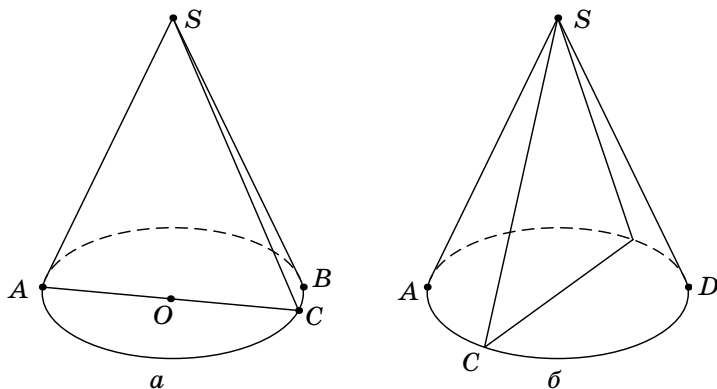


Рис. 2.11

Доказательство

1. Пусть P – вершина конуса K , а F – его основание, F_1 – сечение конуса плоскостью α_1 , параллельной плоскости основания α (рис. 2.13).

2. Каждой точке $X \in F$ поставим в соответствие точку X_1 , в которой отрезок PX пересекает плоскость α_1 .

3. Докажем, что это соответствие является подобием, т.е. что при таком соответствии все расстояния изменяются в одном и том же отношении.

4. Проведём высоту PO конуса K . Пусть O_1 – точка, в которой высота PO пересекает плоскость α_1 . Отрезок PO_1 является высотой конуса K_1 , отсечённого плоскостью α_1 .

5. Возьмём две точки X и Y основания F . Пусть X_1 и Y_1 – точки пересечения отрезков PX и PY с плоскостью α_1 .

6. Рассмотрим треугольники PXY и PX_1Y_1 . Они подобны, т.к. отрезки XY и X_1Y_1 параллельны (поскольку плоскость PXY пересекает параллельные плоскости α и α_1 по параллельным прямым).

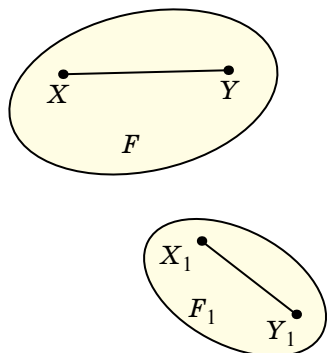


Рис. 2.12

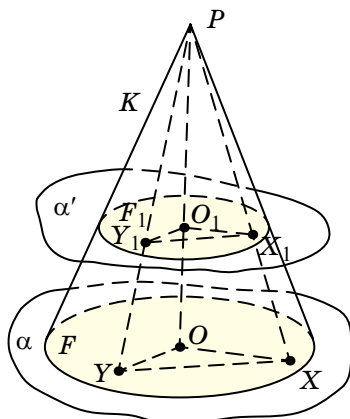


Рис. 2.13

7. Из подобия треугольников PXY и PX_1Y_1 заключаем, что $\frac{PX_1}{PX} = \frac{X_1Y_1}{XY}$.

8. Теперь рассмотрим треугольники POX и PO_1X_1 . Они также подобны, и поэтому $\frac{PX_1}{PX} = \frac{PO_1}{PO}$.

9. Из двух последних равенств следует, что $\frac{X_1Y_1}{XY} = \frac{PO_1}{PO}$ (7, 8).

10. Поскольку это соотношение установлено для любых точек X и Y основания F , то доказано, что фигура F_1 подобна фигуре F с коэффициентом подобия $k = \frac{PO_1}{PO}$. ■

Из доказанной теоремы следует, что все сечения прямого кругового конуса плоскостями, параллельными основанию (и тем самым перпендикулярными его оси), являются кругами с центрами на оси (рис. 2.14).

III. Пересечём коническую поверхность вращения плоскостями, не проходящей через вершину S .

Получающиеся при этом ограниченные фигуры (рис. 2.15) оказываются эллипсами, а неограниченные – гиперболами (если секущая плоскость пересекает обе полости конуса) и параболой (если секущая плоскость пересекается лишь с одной из его полостей). Все сечения, которые при этом получаются, называются *коническими*.

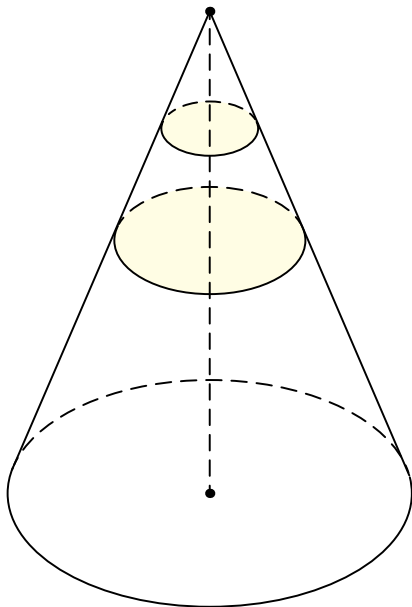


Рис. 2.14

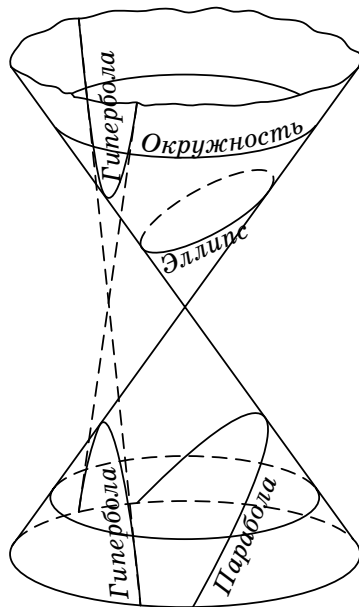


Рис. 2.15

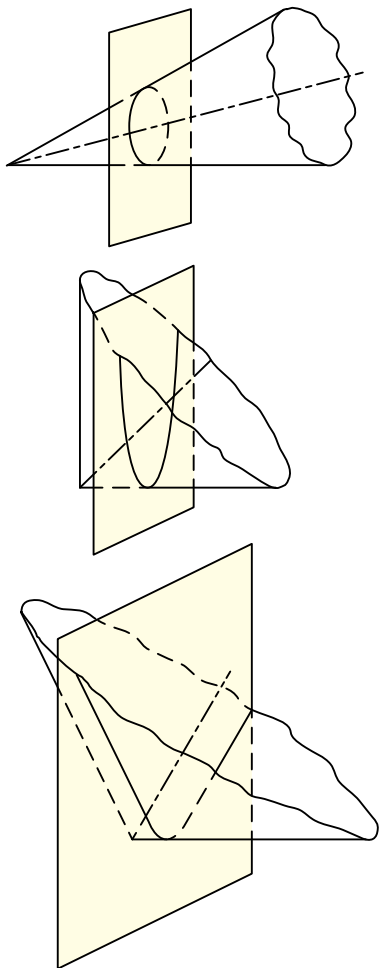


Рис. 2.16

Все виды конических сечений легко получить с помощью карманного фонарика, направляя его под разными углами на ровную площадку (рис. 2.16). Правда, при этом у гиперболы мы увидим лишь одну ветвь.

Все названные кривые вы подробно рассматривали в учебнике геометрии для 10 класса (параграф Д.8, стр. 317–329).

Эллипс – это множество всех точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых до двух точек (фокусов) одна и та же.

Гипербола – множество всех точек плоскости, разность расстояний каждой из которых до двух точек (фокусов) одна и та же.

Парабола – множество всех точек плоскости, одинаково удалённых от точки (фокуса) и от не проходящей через неё прямой (директрисы).

Древнегреческий математик Менехм, открывший эти кривые, определял их иначе: как сечения кругового конуса плоскостью, перпендикулярной к одной из образующих. Он назвал полученные кривые сечениями остроугольного, прямоугольного и тупоугольного конусов, в зависимости от угла при вершине осевого конуса. Названия «эллипс», «гипербола» и «парабола» были введены Аполлонием. До нас дошло почти полностью (7 книг из 8) сочинение Аполлония «О конических сечениях». В этом сочинении Аполлоний рассматривает обе полости конуса (см. рис. 2.15) и

пересекает конус плоскостями, не обязательно перпендикулярными к одной из образующей.

Можно доказать такую теорему:

Если плоскость сечения пересекает все образующие конуса (только одну его полость), то линия пересечения – эллипс;

если плоскость параллельна одной образующей (и тоже пересекает одну полость), то линия пересечения – парабола;

если плоскость параллельна двум образующим (пересекает обе полости), то линия пересечения – гипербола.

Изящное доказательство этой теоремы было предложено в 1822 г. бельгийским математиком Жерминалем Данделеном (1794–1847), использовавшим сферы, которые принято теперь называть сферами Данделена.

Дадим доказательство теоремы Данделена для эллипса.

1. Рассмотрим одну полость конической поверхности с вершиной O и две непересекающиеся сферы, касающиеся этой конической поверхности (рис. 2.17а).

2. Проведём плоскость, касающуюся обеих сфер таким образом, что сферы расположены по разные стороны от плоскости. Пусть F_1 и F_2 – точки касания плоскости с рассматриваемыми сферами (рис. 2.17б).

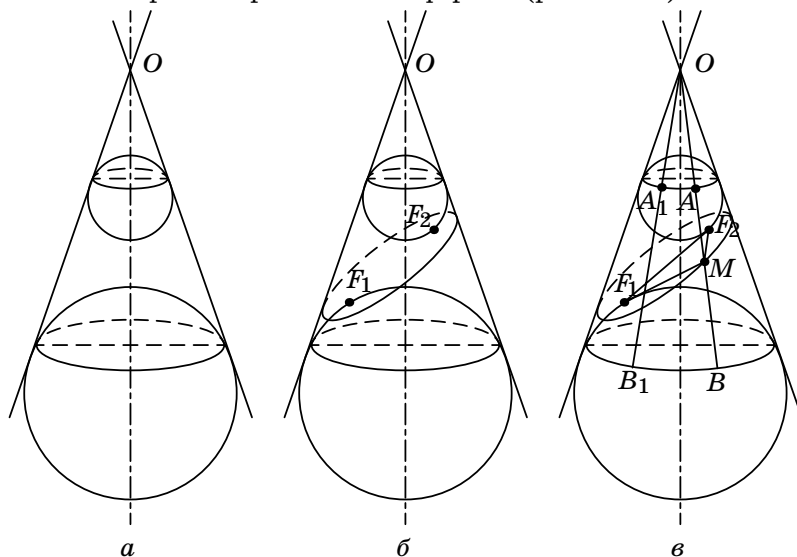


Рис. 2.17

3. Докажем, что сечение конической поверхности рассматриваемой плоскостью представляет собой эллипс с фокусами F_1 и F_2 .

4. Возьмём произвольную точку M сечения и соединим её с точками F_1 и F_2 (построение) (рис. 2.17в).

5. Проведём также луч OM . Пусть он пересекает окружности, по которым коническая поверхность касается со сферами, в точках A и B (построение) (рис. 2.17в).

6. Но поскольку $MF_1 = MB$, $MF_2 = MA$ (как касательные к сферам, проведённые к одной точке), заключаем, что $MF_1 + MF_2 = MB + MA = AB$.

7. Но величина AB (расстояние между точками касания образующей конической поверхности с рассматриваемыми сферами) есть величина постоянная. Это следует из того что для другой образующей, касающейся сфер в точках A_1 и B_1 , будем иметь: $OA_1 = OA$ и $OB_1 = OB$, а значит $A_1B_1 = OB_1 - OA_1 = OB - OA = AB$.

8. Таким образом, доказано, что для любой точки M сечения конической поверхности рассматриваемой плоскостью сумма $MF_1 + MF_2$ есть величина постоянная, а это и значит, что сечение является эллипсом с фокусами F_1 и F_2 .

9. Осталось убедиться, что любая секущая плоскость является общей касательной плоскостью к некоторым двум сферам Данделена. Это можно сделать из соображений непрерывности. Возьмём меньшую сферу такого радиуса, чтобы она полностью лежала по одну сторону от секущей плоскости в том же полупространстве, что и вершина конуса, затем будем непрерывно увеличивать её радиус. В какой-то момент она коснётся плоскости. Аналогично поступим с большой сферой. ■

§ 2.3



РАЗВЁРТКА И ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ КОНУСА

Если боковую поверхность конуса разрезать по какой-нибудь образующей, например по AB , и развернуть её на плоскости, то получится *развёртка боковой поверхности конуса* (рис. 2.14).



Какую фигуру мы при этом получим? Как найти площадь этой фигуры?

Если вспомнить понятие кругового сектора*, то станет ясно, что именно круговой сектор мы и получим. При этом радиусом этого кругового сектора будет являться образующая конуса $AB = l$, а длина дуги сектора будет равна длине окружности основания конуса $C = 2\pi R$ (рис. 2.18).

Развёртки конуса широко используются для изготовления предметов, имеющих форму конуса. Это походные палатки, различные крышки, ёмкости для сбора сосновой смолы, колпаки клоунов и др. Крышами конической формы часто завершаются башни кремлей, мечетей или церквей (рис. 2.19).

* Описание кругового сектора было сформулировано на стр. 243 учебника «Геометрия», 9 класс.

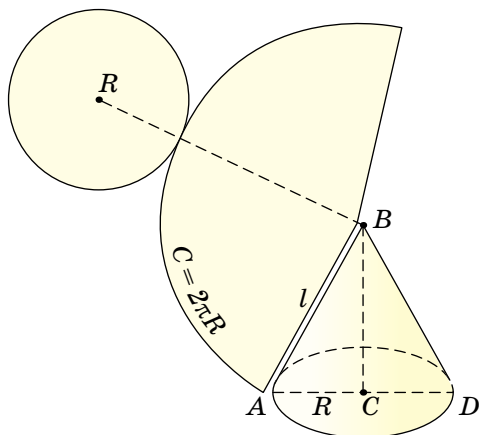


Рис. 2.18



Рис. 2.19

Расчёты, связанные с расходом кровельного материала, краски, золота и других материалов, требуют умения вычислять площади боковой и полной поверхности конуса.

Если мы хотим найти *площадь боковой поверхности конуса*, то для этого нужно уметь находить площадь соответствующего кругового сектора.

Выведем формулу, по которой можно вычислять площадь боковой поверхности конуса.

1. Пусть нам дан конус с радиусом основания R и образующей l (рис. 2.18).

2. Нам нужно найти площадь боковой поверхности конуса – $S_{\text{бок}}$.

Если посмотреть на рис. 2.18, то можно заметить, что

3. Площадь боковой поверхности конуса равна площади кругового сектора с радиусом l и длиной дуги $2\pi R$ (рис. 2.18) (1).

4. Используя формулу площади кругового сектора, получим:

$$S = S_{\text{сект.}} = \frac{\pi l p}{360^\circ},$$

где p – угловая величина дуги сектора (3, формула кругового сектора).

5. Приравняв длину окружности основания конуса $2\pi R$ к длине дуги

сектора $\frac{\pi l p}{180^\circ}$ найдем угловую величину дуги p :

$$2\pi R = \frac{\pi l p}{180^\circ}, \text{ откуда } p = \frac{360^\circ R}{l} \quad (4).$$

$$6. S_{\text{сект.}} = \frac{\pi l^2}{360^\circ} \cdot \frac{360^\circ R}{l} = \pi R l,$$

$S_{\text{бок. пов. кон.}} = \pi R l = \frac{1}{2} C l$, где C – длина окружности основания конуса (4, 5).

Итак, мы вывели формулу (доказали теорему):

Теорема 3. Площадь боковой поверхности конуса равна половине произведения длины окружности основания на образующую.

За площадь поверхности конуса, или за площадь полной поверхности конуса, принимается площадь его развёртки. Она состоит из площади боковой поверхности и площади круга основания (рис. 2.18):

$$S_{\text{полн. пов. кон.}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R).$$

Итак, для вычисления площадей боковой и полной поверхностей конуса надо знать образующую и радиус основания конуса.

§ 2.4*



КОНИЧЕСКАЯ ВИНТОВАЯ ЛИНИЯ

В параграфе 1.4 нашего учебника мы достаточно подробно говорили о цилиндрической винтовой линии. Не меньшее значение в геометрии и особенно в окружающем нас мире имеют *конические винтовые линии*.

Многое о том, что мы говорили про цилиндрическую винтовую линию, относится и к конической.

Очень похоже и само построение конической винтовой линии.

Точка опишет коническую винтовую линию, если она движется равномерно по образующей конуса, а эта образующая вращается равномерно около оси конуса с постоянной угловой скоростью (рис. 2.20).

При построении конической винтовой линии мы на рис. 2.20 провели 12 образующих конуса и разделили шаг винтовой линии тоже на 12 равных

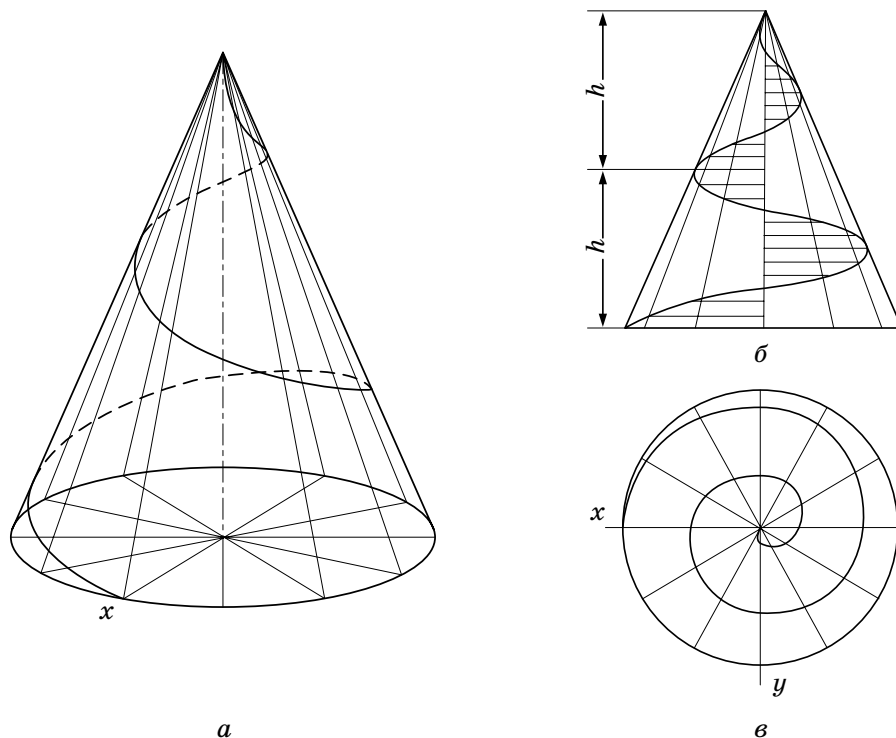


Рис. 2.20

частей. В рассматриваемом случае точка за два оборота поднимается от основания конуса до его вершины.

Коническую винтовую линию можно наблюдать на шурупах для дерева (рис. 2.21), в архитектуре, в живой природе.

Конические спирали (то есть спирали, навитые на поверхность конуса), например пружины в матрасах, могут быть право- и левовинтовыми*.

Спиральные образования, которыми изобилуют живые организмы, от простейшего вируса до частей человеческого тела, с помощью генетического кода почти всегда получают точную информацию о том, в какую сторону им закручиваться; более того, носителем генетического кода служат гигантские молекулы нуклеиновой кислоты, которые (по мнению большинства биохимиков) всегда закручены по правовинтовой спирали.

У животных, обладающих двусторонней (или, ещё говорят, билатеральной) симметрией, более крупные спиральные образования обычно встречаются попарно – по одному с каждой стороны тела животного, каждая из

* При написании материала о спиралях мы использовали статью «От штопора до ДНК» из книги Мартина Гарднера «Математические досуги». – М.: Мир, 1972.

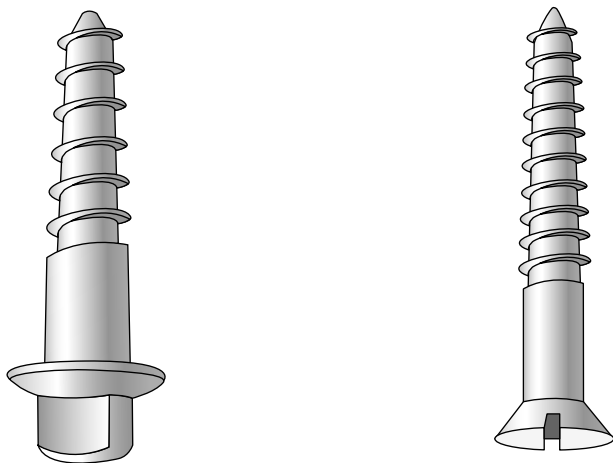


Рис. 2.21

двух спиралей, образующих пару, переходит в другую при зеркальном отражении. Эффективными примерами этого могут быть рога баранов, козлов, антилоп и других млекопитающих (рис. 2.22а). У человека ушная улитка имеет форму конической спирали: в правом ухе – правовинтовую, в левом – левовинтовую. Любопытным исключением является зуб нарвала – небольшого кита, который обитает в водах северных морей. Это необычное животное появляется на свет с двумя верхними зубами. У самки оба зуба скрыты в челюсти. У самца правый зуб также скрыт в челюсти, зато левый зуб начинает расти вперёд и торчит изо рта, словно копьё. Размер его достигает почти трёх метров, т.е. превышает половину длины животного от кончика носа до кончика хвоста! Весь зуб обвит спиральными бороздками, закручивающимися против часовой стрелки от основания зуба к его концу. Казалось бы, в тех редких случаях, когда оба зуба превращаются в бивни, желобки на правом зубе должны были бы закручиваться по часовой стрелке. В действительности же спираль на правом зубе тоже оказывается левовинтовой.

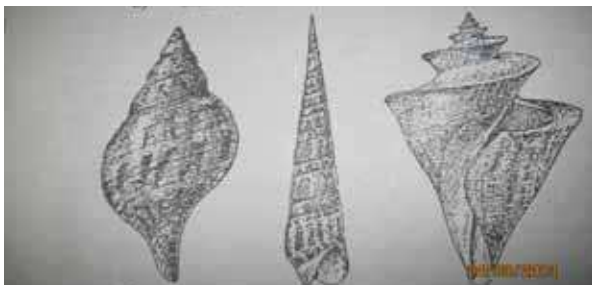
Самыми удивительными примерами являются раковины улиток и других моллюсков, свёрнутые в коническую спираль. Далеко не всегда можно говорить о том, в какую сторону закручена раковина. Например, плоскую раковину наутилуса можно рассечь пополам на две одинаковые части: правую и левую. Однако существуют тысячи красивейших раковин, образующих либо правую, либо левую спираль (рис. 2.22 в). У одних моллюсков раковины бывают закручены только вправо, у других – только влево. Некоторые виды моллюсков в одной местности всегда закручивают свою раковину вправо, а в другой – только влево. Изредка попадающиеся «уродцы», закрученные в «обратную» сторону, очень высоко ценятся коллекционерами.



а



б



в

Рис. 2.22, а – рога памирского барана, закрученные в противоположные стороны; **б** – бивни нарвала, имеющие всегда левовинтовую нарезку; **в** – три раковины, имеющие форму правовинтовых конических спиралей

В мире растений спирали встречаются на каждом шагу: в строении соцветий шишек, листьев и ветвей вокруг ствола дерева (рис. 2.23).

По спирали перемещаются и некоторые неодушевлённые предметы, и представители живой природы: любая точка (кроме осевой) вращающегося винта самолёта или парохода; белка, взбегающая вверх или спускающаяся вниз по дереву; стаи летучих мышей, вылетающие из подземных пещер. В качестве примеров конической спирали можно привести водовороты, воронки ураганов, траекторию точек воды, стекающей по жёлобу, и тысячи других явлений природы.

Рассмотрим некоторые важные *проекции винтовой линии*.

Горизонтальная проекция конической винтовой линии представляет собой спираль Архимеда (рис. 2.20в).

Мы в последних разделах затронули вопросы, связанные с некоторыми геометрическими кривыми: окружностью, эллипсом, гиперболой, параболой, цилиндрической и конической винтовыми линиями.

На примере этой кривой попробуем более подробно поговорить о кривых вообще.

В этом разделе появилась новая кривая – *спираль Архимеда*. Она изображена на рис. 2.20.



Как можно задать аналитически (в виде формулы) эту кривую?

В декартовых координатах это сделать непросто. Нас выручают так называемые *полярные координаты*.

Поясним, что представляет собой *полярная система координат*.

1. Рассмотрим полярные координаты на плоскости. Пусть на плоскости задана координатная прямая с выделенной точкой O и единичным отрезком OE .

2. Эта прямая в данном случае будет называться полярной осью.

3. Полярными координатами точки A на плоскости с заданной полярной осью называется пара (r, φ) , где r – расстояние от точки A до точки O , φ – угол между полярной осью и вектором OA , считаемым в направлении против часовой стрелки (рис. 2.24).

4. Угол φ при этом можно задавать в градусах или радианах.

5. Если на плоскости задана декартова система координат, то обычно за полярную ось принимается ось Ox . В этом случае каждой точке плоскости можно сопоставить полярные координаты (r, φ) (рис. 2.25).

6. При этом декартовы координаты выражаются через полярные по формулам:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases},$$

и, наоборот, полярные координаты выражаются через декартовы по формулам:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

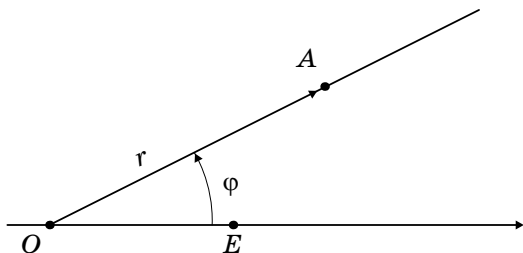


Рис. 2.24

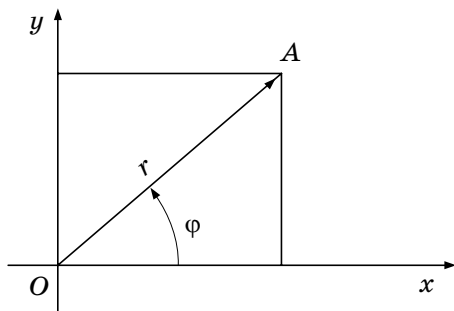


Рис. 2.25



Рис. 2.23

Полярные координаты оказываются удобными для задания кривых на плоскости, особенно для задания различных спиралей. Рассмотрим некоторые из таких кривых.

1. Окружность радиусом R и центром в точке O задается уравнением $r = R$ (рис. 2.26) Обоснуйте свой вывод.

2. Спираль Архимеда.

На рис. 2.20в и 2.27 мы видим изображения спирали Архимеда. Опираясь на эти изображения, можно сформулировать основное геометрическое свойство, которое определяет эту спираль.

Геометрическим свойством, характеризующим спираль Архимеда, является *постоянство расстояния* между соседними точками её пересечения с любым лучом с началом в точке O .

1. Действительно, если угол φ увеличивается на 2π , т.е. точка делает один оборот против часовой стрелки, радиус увеличивается на $2\pi a$, что и составляет расстояние между соседними витками.

2. В самом деле, для линии, проведённой на рис. 2.20 в, при каждом повороте образующей на $\frac{1}{12}$ окружности точка этой линии приближается к центру на $\frac{1}{24}$ радиуса основания.

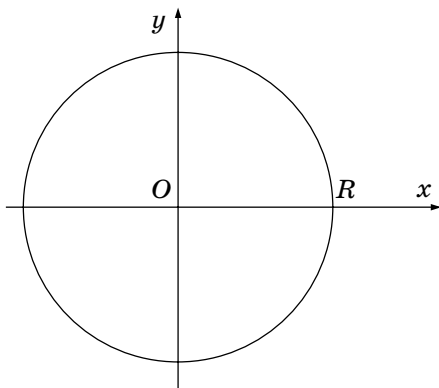


Рис. 2.26

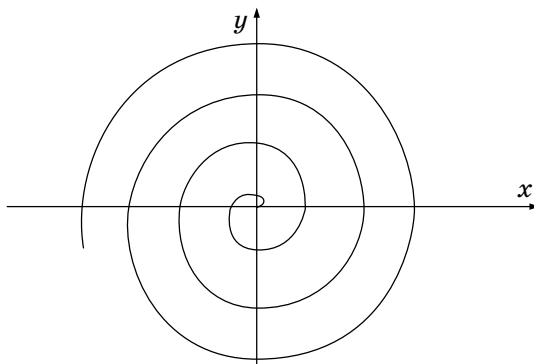


Рис. 2.27

3. Спираль Архимеда в полярной системе координат задается уравнением $r = a\varphi$, где a – некоторое фиксированное число, φ – угол, измеряемый в радианах (рис. 2.27).

4. Предположим, что $a > 0$, и построим эту кривую. Если $\varphi = 0$, то $r = 0$.

5. Это означает, что углу $\varphi = 0$ соответствует точка O на кривой.

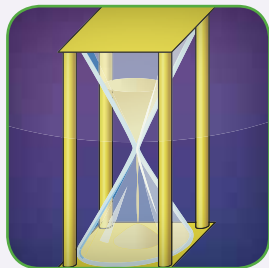
6. Поскольку радиус r должен быть неотрицательным числом, то отрицательным углом φ никаких точек на кривой $r = a\varphi$ не соответствует.

7. Посмотрим, как изменяется радиус при измерении φ от нуля до $+\infty$. В этом случае радиус r будет возрастать и изменяться от нуля до $+\infty$. Например, при $\varphi = \frac{\varphi}{2}$ радиус r будет равен $\frac{a\pi}{2}$; при $\varphi = \pi$ он будет равен $a\pi$, т.е. в 2 два раза больше; при $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ он будет в три раза больше и т.д.

Соединяя плавной линией найденные точки, получим кривую, которая называется *спиралью Архимеда*.

По спирали Архимеда идёт, например, звуковая дорожка на грампластинке; поперечное сечение туго свёрнутого рулона бумаги также представляет собой спираль Архимеда. Металлическая пластинка в виде половины витка архимедовой спирали часто используется в конденсаторе переменной ёмкости. Одна из деталей швейной машины – механизм для равномерного наматывания ниток на шпульку – имеет форму спирали Архимеда.

§ 2.5



ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ КОНУСЫ

Так же, как и в случае шара и цилиндра, мы часто рассматриваем фигуры, вписанные в конус и описанные около него. Чаще всего мы рассматриваем пирамиды, вписанные в конус и описанные около него.

Определение 8. Пирамида называется *вписанной в конус*, если вершина пирамиды совпадает с вершиной конуса, а основание пирамиды вписано в окружность основания конуса.

На рис. 2.28 изображена пирамида $BFDM$, вписанная в конус с вершиной B . $\triangle DFM$ вписан в основание конуса.

У пирамид, вписанных в конус (рис. 2.28), боковые рёбра равны, т.к. они являются образующими конуса. Вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания, т.е. в центр основания конуса. Высота конуса и высота вписанной в него пирамиды совпадают.

Определение 9. Пирамида называется *описанной около конуса*, если вершина пирамиды совпадает с вершиной конуса, а основание пирамиды описано около основания конуса.

На рис. 2.29 изображён конус с вершиной S , вписанный в четырёхугольную пирамиду $SABCD$. При этом вершины конуса и пирамиды совпадают, а основание конуса вписано в четырёхугольник $ABCD$.

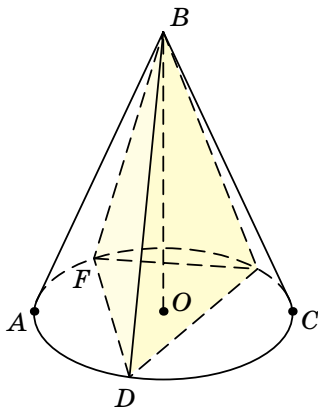


Рис. 2.28

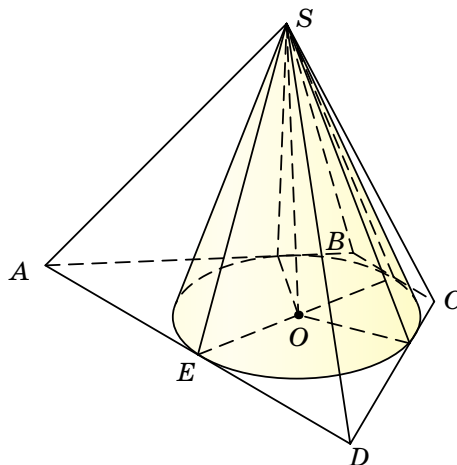


Рис. 2.29

Докажите самостоятельно, что пирамида, описанная около конуса, имеет равные двугранные углы при основании.

ЗАДАЧА 1

Основанием пирамиды, описанной около конуса, является трапеция, разность оснований которой равна 14 см, а непараллельные стороны равны 13 см и 15 см. Двугранный угол при основании пирамиды равен α . Найдите боковую поверхность конуса.

Решение

1. Пирамида $SABCD$.
2. $ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$, $AD - BC = 14$ см, $AB = 13$ см, $DC = 15$ см.
3. Двугранные углы граней пирамиды с основанием равны между собой и равны α .
4. Конус с вершиной в точке S , вписан в пирамиду, основание конуса вписано в основание пирамиды.
5. Найти боковую поверхность конуса.

(дано) (рис. 2.29)

6. Используя формулу боковой поверхности конуса, можно записать: $S_{\text{бок}} = \pi Rl$, где R – радиус основания конуса, а l – образующая конуса.

Решение сводится к нахождению R и l . Сначала разберёмся с такой конструкцией – конус вписан в пирамиду. Какими свойствами обладают образующие конуса и как их провести?

7. Соединим вершину конуса с точками касания основания конуса сторон трапеции $ABCD$ (построение) (рис. 2.29).

8. Отрезок SE и другие проведённые отрезки являются образующими конуса (4, 7, определение образующей конуса).

9. Проведём высоту конуса SO и соединим точку O с точками касания основания конуса и трапеции $ABCD$ (построение) (рис. 2.29).

10. Отрезки OE и другие проведённые отрезки являются радиусами конуса и радиусами окружности, вписанной в трапецию $ABCD$ (4, 9, определение окружности, вписанной в трапецию).

11. Рассмотрим $\triangle SOE$. SO – перпендикуляр плоскости основания, $OE \perp AD$ (9, 10, признак касательной).

12. $SE \perp AD$ (10, 11, теорема о трёх перпендикулярах).

13. $\angle SEO$ – линейный угол двугранного угла, образуемого гранями пирамиды с плоскостью основания (3, 11, 12, определение линейного угла двугранного угла), значит $\angle SEO = \alpha$.

Итак, $\triangle SOE$ – прямоугольный, $\angle SEO = \alpha$.

Нам нужно для решения найти l и R ; l мы найдём, если известно R . Значит, вся остальная часть задачи сводится к нахождению R .

Рассмотрим основание нашей конструкции отдельно – рисунок 2.30а. Нам нужно найти R . Как это сделать?

14. Выполним следующие дополнительные построения: проведём $BK \perp AD$, $BM \parallel CD$ (построение) (рис. 2.30б).

15. $BK = 2R$ (4, 14).

16. $AM = 14$ см, $AB = 13$ см, $BM = 15$ см (2, 14, свойство параллельных прямых).

Мы получили $\triangle ABM$, в котором нам известны все три стороны. Нам нужно найти высоту этого треугольника. Нам может помочь теорема косинусов.

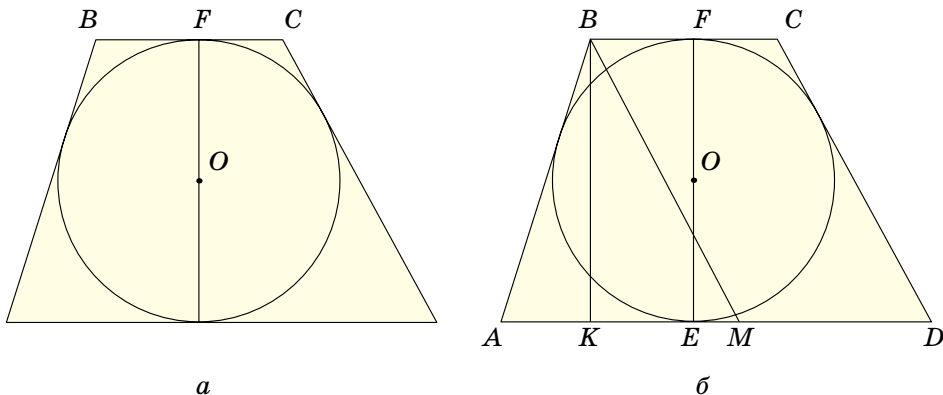


Рис. 2.30

17. Из треугольника ABM найдём

$$\cos A = \frac{169 + 196 - 225}{2 \cdot 13 \cdot 14} = \frac{140}{2 \cdot 13 \cdot 14} = \frac{5}{13} \text{ и } \sin A = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13} \quad (16, \text{ теорема коси-}$$

нусов, основное тригонометрическое тождество).

18. В треугольнике ABK , где $\angle K = 90^\circ$, $\frac{BK}{AB} = \sin A$, откуда $BK = 13 \cdot \frac{12}{13} = 12$ см.

Тогда $R = 6$ см (15, 17, определение синуса).

19. Из треугольника SEO , где $\angle O = 90^\circ$, $\frac{OE}{SE} = \cos \alpha$, откуда $SE = \frac{6}{\cos \alpha}$ (13, 18, определение косинуса).

20 (5). Найдём боковую поверхность конуса:

$$S_{\text{бок}} = 6\pi \frac{6}{\cos \alpha} = \frac{36\pi}{\cos \alpha} \quad (6, 18, 19). \blacksquare$$

ЗАДАЧА 2

Дан конус с радиусом R и высотой H . В этот конус вписана правильная треугольная призма, у которой боковые грани – квадраты. Найдите ребро призмы.

Решение

1. Конус с радиусом основания R и высотой H .
 2. Правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, вписанная в конус.
 3. Боковые грани призмы – квадраты.
 4. Найдите ребро призмы.
- (дано)

Прежде всего возникает вопрос о рисунке к данной задаче. Призма вписана в конус. Это значит, что нижнее основание призмы принадлежит основанию конуса, а вот верхнее основание призмы находится внутри конуса и име-

ет с поверхностью конуса три общие точки – вершины призмы – A_1, B_1, C_1 . Изобразить такую картину довольно трудно. Можно поступить так:

5. Рассмотрим вписанную в конус с вершиной P правильную треугольную пирамиду $PA_0B_0C_0$, в которую в свою очередь вписана данная правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (построение) (рис. 2.31).

6. Все ребра призмы равны, и их длину x нужно найти (2, 3).

7. Рассмотрим медианное сечение PA_0K_0 пирамиды (K_0 – середина B_0C_0) (рис. 2.32).

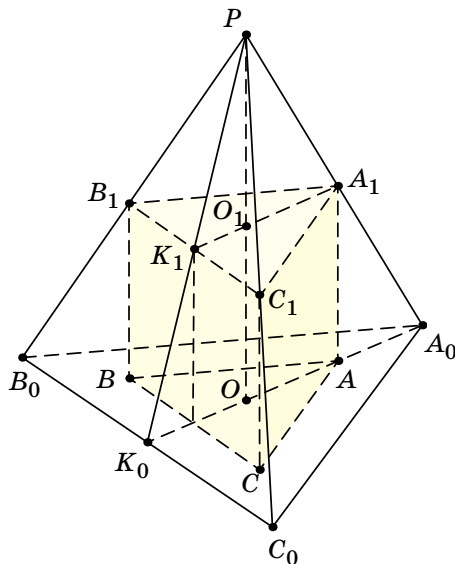


Рис. 2.31

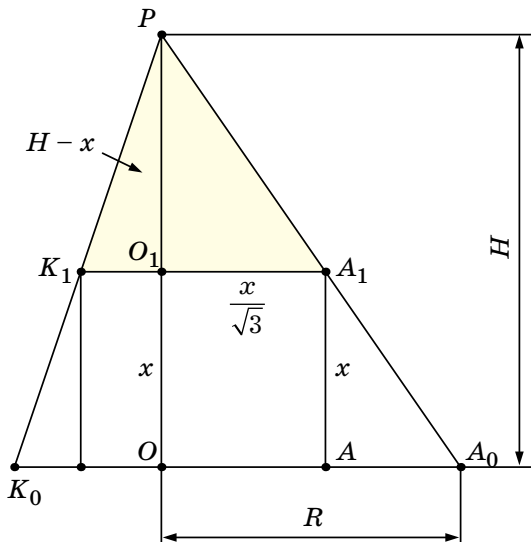


Рис. 2.32

8. Треугольники PO_1A_1 и POA_0 подобны.

9. Из подобия треугольников PO_1A_1 и POA_0 получим $PO_1:PO = O_1A_1:OA_0$ (8).

10. $PO = H$ – высота конуса, $PO_1 = PO - OO_1 = PO - AA_1 = H - x$, $OA_0 = R$ – радиус основания конуса, $O_1A_1 = \frac{x}{\sqrt{3}}$ – радиус описанной около правильного треугольника со стороной x окружности (эти факты следуют из всех предыдущих пунктов).

$$11. \frac{H-x}{H} = \frac{\frac{x}{\sqrt{3}}}{R}, \quad 1 - \frac{1}{H} \cdot x = \frac{1}{R\sqrt{3}} \cdot x \quad (9, 10).$$

$$12. x \cdot \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{R\sqrt{3}} \right) = 1, \quad x = \frac{HR\sqrt{3}}{H + R\sqrt{3}} \quad (6, 11). \quad \blacksquare$$



УСЕЧЁННЫЙ КОНУС

Среди сечений конуса есть одно, которое образует особую фигуру, называемую *усечённым конусом*. Это сечение плоскостью, проходящей через точку на высоте конуса и параллельной основанию (рис. 2.33).

Можно дать такое определение усечённому конусу:

Определение 10. *Усечённым конусом* называется часть конуса, заключённая между его основанием и сечением, параллельным основанию.

На рис. 2.33 изображён усечённый конус, его основаниями являются круг (O_1, O_1A) и круг (O, OB) , центры которых O и O_1 являются концами отрезка, перпендикулярного плоскостям этих кругов.

Определение 11. Перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки одного основания усечённого конуса на плоскость другого основания, называется *высотой усечённого конуса*.

За высоту усечённого конуса можно принять отрезок, соединяющий центры оснований усечённого конуса, т.е. отрезок OO_1 (рис. 2.33).

Образующие усечённого конуса являются частями образующих полного конуса. Все образующие усечённого конуса равны (обоснуйте вывод).

Усечённый конус можно также рассматривать как фигуру, которая образована вращением прямоугольной трапеции OO_1AB вокруг боковой стороны, перпендикулярной основаниям трапеции, т.е. вокруг стороны OO_1 (рис. 2.34). При таком вращении наклонная боковая сторона трапеции опишет боковую поверхность усечённого конуса.

При изображении усечённого конуса можно сначала начертить полный конус, а потом изобразить его параллельное сечение (рис. 2.33), но возможно и такое изображение, как на рис. 2.34.

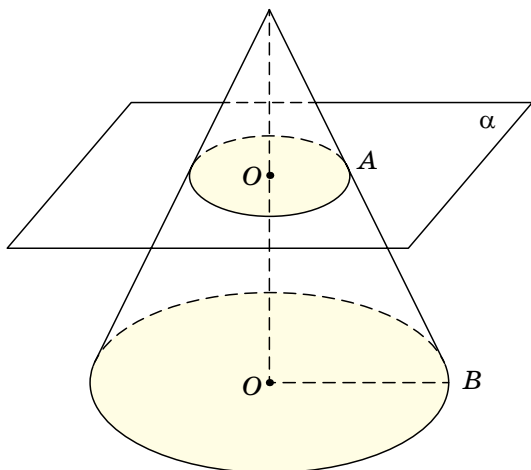


Рис. 2.33

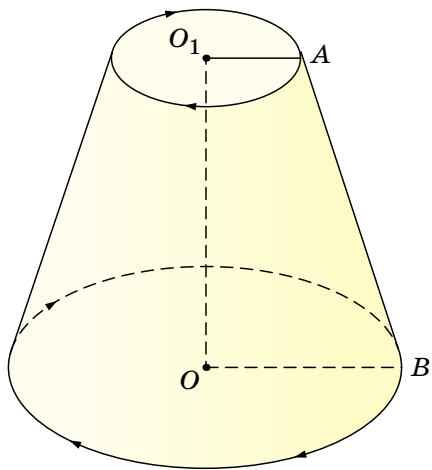


Рис. 2.34

Если боковую поверхность усечённого конуса разрезать по какой-нибудь образующей и развернуть на плоскости, то эта поверхность развернётся в часть развёртки полного конуса, т.е. в часть кругового сектора, ограниченного двумя образующими усечённого конуса и двумя дугами. Длины этих дуг равны длинам окружностей верхнего и нижнего оснований усечённого конуса. Такую фигуру называют *развёрткой боковой поверхности усечённого конуса* (рис. 2.35).

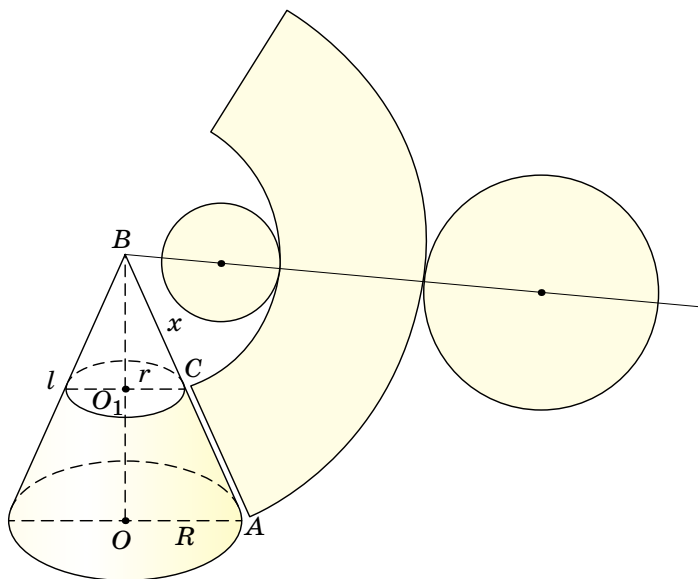


Рис. 2.35

Выведем формулу для вычисления площади боковой поверхности усечённого конуса.

1. Пусть нам дан усечённый конус, R и r – радиусы его оснований, l – образующая (рис. 2.35) (дано).

2. Нам нужно найти площадь боковой поверхности усечённого конуса. Посмотрев на рис. 2.35, вы поймёте, что

3. Площадь боковой поверхности усечённого конуса можно вычислить как разность площадей боковых поверхностей полных конусов с высотами BO и BO_1 (1, определение усечённого конуса, свойства площадей) (рис. 2.35).

$S_{\text{бок. пов. ус. кон.}} = \pi R \cdot AB - \pi r \cdot BC = \pi(R \cdot AB - r \cdot BC)$ (1, 3, формула площади боковой поверхности конуса).

4. Пусть $BC = x$, тогда $AB = l + x$ (обозначения) (рис. 2.35).

Нам нужно найти x , а значит и AB . Для этого следует доказать подобие треугольников AOB и CO_1B .

5. $\triangle AOB \sim \triangle CO_1B$ (1, лемма о подобии треугольников).

6. Из подобия треугольников AOB и CO_1B запишем: $\frac{r}{R} = \frac{x}{l+x}$ (5, свойства подобных треугольников).

$$7. x = \frac{rl}{R-r}, \text{ а } AB = l + \frac{rl}{R-r} = \frac{Rl}{R-r} \quad (6).$$

8. Подставим найденные значения в выражение $S_{\text{бок. пов. ус. кон.}}$:

$$S_{\text{бок. пов. ус. кон.}} = \pi \left(R \frac{Rl}{R-r} - r \frac{rl}{R-r} \right) = \pi l \frac{R^2 - r^2}{R-r} = \pi l(R+r) \quad (1, 3, 7).$$

$$S_{\text{бок. пов. ус. кон.}} = \pi l(R+r).$$

Выразим боковую поверхность усечённого конуса через длины окружностей оснований C и C_1 :

$$S_{\text{бок. пов. ус. кон.}} = \frac{2\pi R + r\pi r}{2} = \frac{C + C_1}{2} l.$$

Итак, мы доказали теорему:

Теорема 4. Площадь боковой поверхности усечённого конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую.

За площадь поверхности усечённого конуса, или за полную поверхность усечённого конуса, принимается площадь его развёртки. Она состоит из площади его боковой поверхности и площади кругов оснований (рис. 2.35)

$$S_{\text{бок. пов. ус. кон.}} = \pi l(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2.$$

Существуют усечённые пирамиды, которые называют вписанными в усечённый конус или описанными около него. Их определяют следующим образом:

Определение 12. Усечённая пирамида называется *вписанной в усечённый конус*, если основания пирамиды вписаны в основания усечённого конуса.

На рис. 2.36 усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ вписана в усечённый конус с осью OO_1 . Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ вписаны в окружности основания конуса. Отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 являются образующими усечённого конуса.

Определение 13. Усечённая пирамида называется *описанной около усечённого конуса*, если основания пирамиды описаны около оснований усечённого конуса.

На рис. 2.37 усечённая пирамида $ABCD A_1B_1C_1D_1$ описана около усечённого конуса с осью OO_1 . Четырёхугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ описаны около окружностей оснований усечённого конуса.

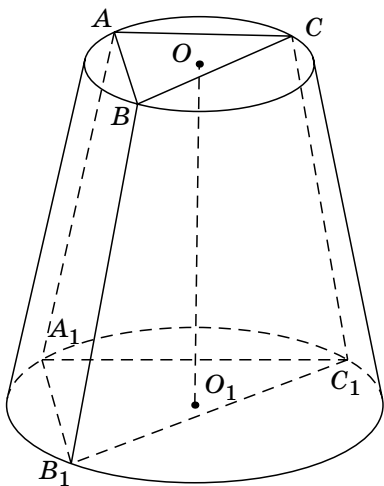


Рис. 2.36

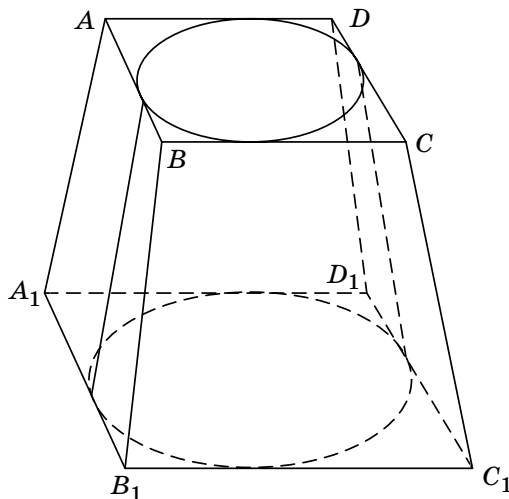


Рис. 2.37

В этом случае образующие усечённого конуса, соединяющие точки касания окружностей оснований конуса и сторон оснований пирамиды, являются высотами боковых граней усечённой пирамиды (рис. 2.37).

Покажем использование этих понятий на примере решения задачи.

ЗАДАЧА

В правильную усечённую четырехугольную пирамиду с двугранным углом α при нижнем основании вписан усечённый конус. Найдите боковую поверхность усечённого конуса, если стороны нижнего и верхнего оснований пирамиды равны соответственно a и b .

Решение

1. В правильную усечённую пирамиду $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписан усечённый конус. Стороны верхнего и нижнего оснований усечённой пирамиды равны соответственно a и b .

2. Образующая $K_1 K$ соединяет точки касания оснований.

3. Двугранный угол при нижнем основании равен α .

4. Найти боковую поверхность усечённого конуса.

(дано)
(рис. 2.38)

5. $S_{\text{бок. пов. ус. кон.}} = \pi K_1 K (OK + O_1 K_1)$ (1, 2, формула площади боковой поверхности)

6. $O_1 K_1$ и OK – радиусы оснований конуса, тогда $O_1 K_1 = \frac{b}{2}$, $OK = \frac{a}{2}$ (1, свойства правильных описанных четырёхугольников).

Нам нужно найти образующую усечённого конуса, а для этого следует использовать п.3. Полезно рассмотреть осевое сечение, проходящее через ось OO_1 и образующую KK_1 .

7. Рассмотрим осевое сечение, проходящее через ось OO_1 и образующую KK_1 и проведём в нём высоту $K_1 Q$ ($Q \in OK$) (построение) (рис. 2.38).

$$8. QK = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2} \quad (7) \text{ (обоснуйте)}$$

подробно этот вывод).

9. Так как $K_1 Q \parallel O_1 O$, то $K_1 Q$ – высота конуса, $K_1 K$ – наклонная к основанию.

10. Проекция этой наклонной QK перпендикулярна DC , значит, и наклонная $K_1 K$ перпендикулярна прямой DC (7, 8, 9, теорема о трёх перпендикулярах).

11. $\angle K_1 K Q$, будучи линейным углом двугранного угла DC , равен α (7, 10, определение линейного угла двугранного угла).

$$12. \frac{QK}{K_1 K} = \cos \alpha, \text{ откуда } K_1 K = \frac{a-b}{2 \cos \alpha} \quad (11, \text{определение косинуса}).$$

$$13. S_{\text{бок. пов. ус. кон.}} = \pi \frac{a-b}{2 \cos \alpha} \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right) = \pi \frac{a^2 - b^2}{4 \cos \alpha}. \blacksquare$$

Для того, чтобы цилиндрический стержень (рис. 2.39а) было удобнее заводить в предназначенное для него отверстие, конец стержня часто затачивается на конус (рис. 2.39б). Получается так называемая коническая фаска. Аналогичная фаска делается также и в отверстии. Фаска характеризуется размерами высоты соответствующего усечённого конуса и углом между образующей этого конуса и его осью.

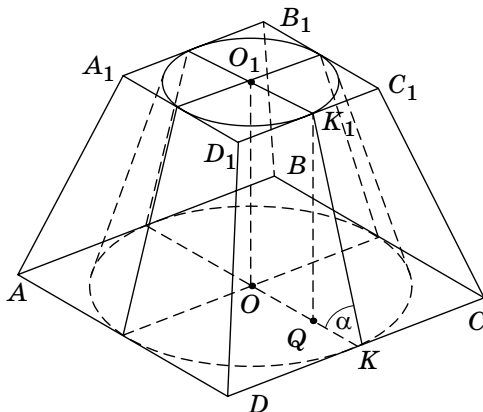


Рис. 2.38

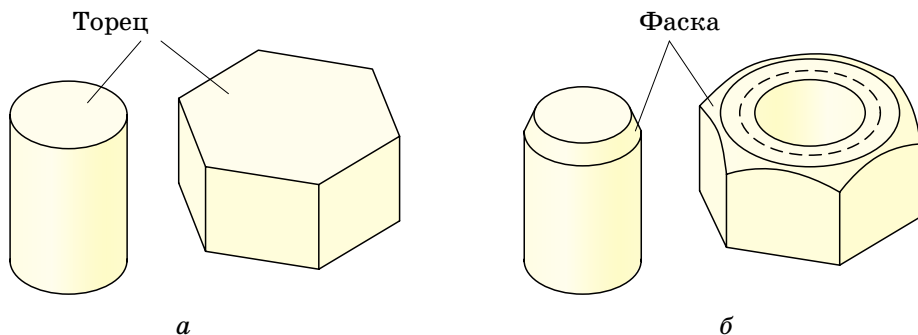


Рис. 2.39

Иногда форма конических элементов деталей задаётся с помощью так называемой *конусности*.

Конусностью называется отношение диаметра основания конуса к его высоте; например, на рис. 2.40а, мы имеем конусность, равную 2 : 3, $\frac{AC}{BE} = \frac{d}{h} = \frac{2}{3}$.

Если обозначить через α угол между образующей конуса и его высотой, то величина конусности численно будет равна $2\operatorname{tg}\alpha$. Таким образом, зная величину конусности, нетрудно, пользуясь таблицей тангенсов, вычислить величину угла при вершине конуса, который равен 2α .

Например, при конусности 2 : 3 получим (рис. 2.40а) $2\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, откуда $\alpha = 18^\circ 26'$, $\angle ABC = 2\alpha = 36^\circ 52'$.

Для усечённого конуса конусность представляет собой величину приращения диаметра основания конуса на единицу длины его оси; например, на рис. 2.40б имеем конусность, равную 1 : 3, $\frac{D-d}{h} = \frac{1}{3}$.

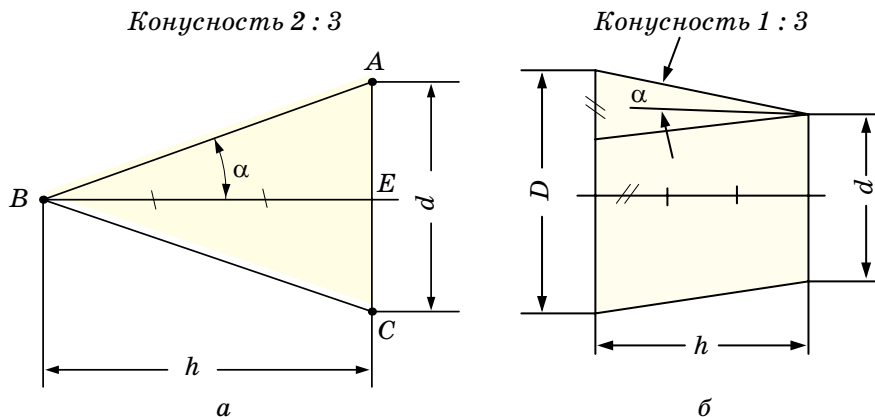


Рис. 2.40

В этом случае $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{D-d}{h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, откуда $\alpha = 9^{\circ}27'$.

Следовательно, угол между образующими в осевом сечении усечённого конуса равен $2\alpha = 18^{\circ}54'$.

Вместо того чтобы вычислять конусность для усечённого конуса, можно продолжить его образующие до пересечения в вершине и вычислить конусность как отношение длины диаметра основания к высоте полученного полного конуса.

§ 2.7*



ОБЩАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ БОКОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НЕКОТОРЫХ ФИГУР ВРАЩЕНИЯ

Поставим задачу, используя формулы площадей боковых поверхностей цилиндра, конуса и усечённого конуса, вывести общую формулу для нахождения площадей этих поверхностей.

Теорема 5. Площадь боковой поверхности цилиндра, конуса, усечённого конуса равна произведению высоты фигуры на длину окружности, радиус которой есть отрезок срединного перпендикуляра к образующей от её середины до пересечения с осью вращения.

Доказательство

1. На рис. 2.41 изображены три фигуры, полученные при вращении прямоугольника O_1OAB (рис. 2.41а), треугольника OAB (рис. 2.41б), прямоугольной трапеции O_1OAB (рис. 2.41в) вокруг осей соответственно O_1O , OA , O_1O .

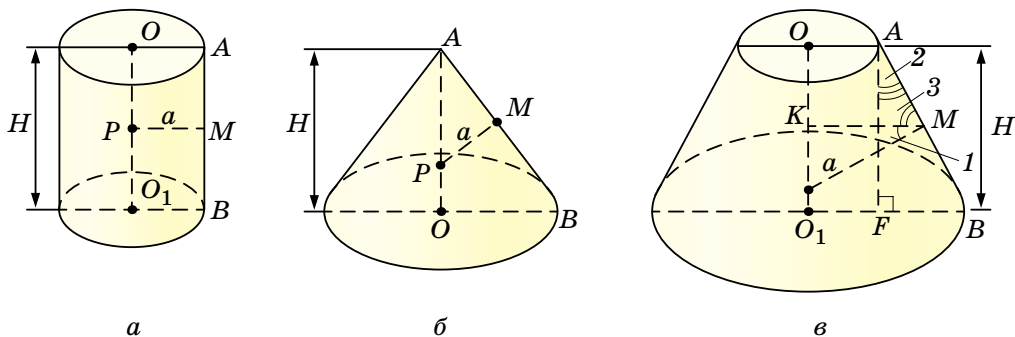


Рис. 2.41

2. $MP = a$ – отрезок серединного перпендикуляра к образующей от её середины до пересечения с осью, H – высота фигуры вращения.

3. $S_{\text{бок. пов. цил.}} = H \cdot 2\pi a$,
где $MP \perp AB$ и M – середина AB .

4. $S_{\text{бок. пов. кон.}} = H \cdot 2\pi a$,
где $MP \perp AB$ и M – середина AB .

5. $S_{\text{бок. пов. ус. кон.}} = H \cdot 2\pi a$,
где $MP \perp AB$ и M – середина AB .

Докажем п. 3.

Боковая поверхность цилиндра, полученного вращением прямоугольника OO_1BA , равна $2\pi O_1B \cdot AB$, но $AB = H$, а $O_1B = a$. Следовательно,
 $S_{\text{бок. пов. цил.}} = H \cdot 2\pi a$.

Докажем п. 4.

Боковая поверхность конуса, полученного при вращении прямоугольного треугольника ABO вокруг оси AO , равна $\pi OB \cdot AB$ (1, формула площади боковой поверхности конуса).

6. Сравним треугольники ABO и AMP , у этих треугольников углы AOB и AMP прямые и угол A общий, следовательно, $\triangle ABO \sim \triangle AMP$ (1, признак подобия прямоугольных треугольников).

$$7. \frac{OB}{PM} = \frac{AO}{AM} \text{ или } OB \cdot AM = PM \cdot AO, OB \cdot AB = 2aH \text{ (1, 7).}$$

8. Заменив в выражении $\pi OB \cdot AB$ боковой поверхности конуса произведение $OB \cdot AB$ равным ему произведению $2Ha$, получим: $S_{\text{бок. пов. кон.}} = H \cdot 2\pi a$ (6, 8).

Докажем п. 5.

9. $S_{\text{бок. пов. ус. кон.}} = H \cdot 2\pi a = \pi(R + r)AB$ (1, формула площади боковой поверхности усечённого конуса).

Нам нужно выразить $R + r$ через a . Для этого:

$$10. \text{Проведём } MK - \text{среднюю линию трапеции } O_1OAB, MK = \frac{R+r}{2}$$

и $S_{\text{бок. пов. ус. кон.}} = 2\pi MK \cdot AB$ (1, 9, свойства средней линии трапеции).

11. Проведём $AF \perp O_1B$ ($F \in O_1B$) и рассмотрим треугольники AFB и MKP (1, построение) (рис. 2.37, в).

12. $\angle A = \angle K = 90^\circ$, $\angle KMP = \angle AFB$ ($\angle KMP + \angle AMK = 90^\circ$, $\angle FAB + \angle AMK = 90^\circ$, откуда $\angle 1 = \angle 2$) (11).

13. $\triangle AFB \sim \triangle MKP$ по двум углам. Из подобия треугольников следует:
 $\frac{H}{MK} = \frac{AB}{MP}$, откуда $H \cdot a = MK \cdot AB$ (12, признак подобия треугольников).

14 (5). Заменяя $MK \cdot AB$ произведением $H \cdot a$, получим:

$S_{\text{бок. пов. ус. кон.}} = H \cdot 2\pi a$. ■

§ 2.8



ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ШАРА И ЕГО ЧАСТЕЙ

В нашем курсе мы уже много раз находили площади поверхностей разных фигур: куба, прямоугольного параллелепипеда, призмы, пирамиды и т.д.

Площадь поверхности многогранника обычно определяется как сумма площадей всех его граней. Площади боковой поверхности цилиндра или конуса определяются с помощью развёртки.

Мы хотим найти площадь поверхности шара. Однако развернуть поверхность шара (сферу) на плоскость невозможно. Определение площади поверхности шара можно дать, используя понятие предела.

1. Пусть нам дана полуокружность AF с центром в точке O (рис. 2.42а). При вращении этой полуокружности вокруг диаметра AF мы получим поверхность шара (сферу с центром в точке O и диаметром AF).

2. Впишем в эту полуокружность правильную ломаную линию $ABCDEF$ с числом сторон n (рис. 2.42б). Поверхность, получающаяся при вращении

этой ломаной линии вокруг диаметра AF , будет близка к поверхности соответствующего шара. Если мы будем увеличивать число сторон правильной ломаной, то приближение будет более точным.

Эти построения и рассуждения позволяют дать следующее определение площади поверхности шара.

Определение 14. За площадь поверхности шара, полученного вращением полукруга вокруг диаметра, принимается предел, к которому стремится поверхность, получаемая вращением около того же диаметра правильной вписанной в полуокружность ломаной линии при неограниченном увеличении числа её звеньев.

3. Поверхность, полученная при вращении ломаной, состоит из боковых поверхностей фигур вращения: конусов усечённых конусов и цилиндра (если число звеньев ломаной линии нечётное) (рис. 2.38,в) (1,2, определение фигур вращения).

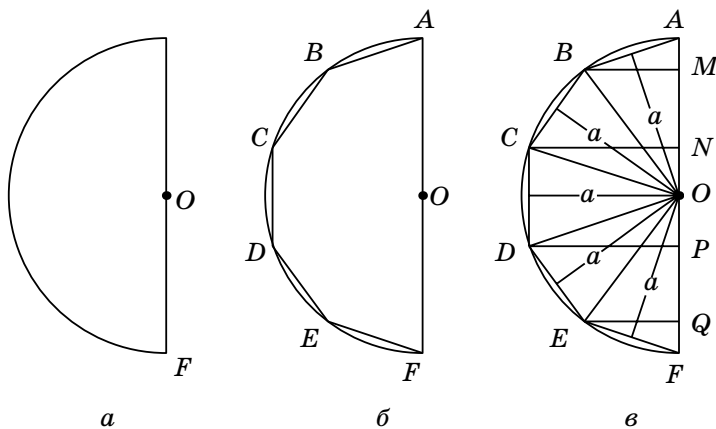


Рис. 2.42

4. Обозначим апофему вписанной ломаной через a (рис. 2.38,в) (обозначение).

В параграфе 2.7 мы доказали общую теорему о площади поверхности фигур вращения – Т.5.

5. Используя Т.5, получим:

Площадь поверхности, полученной при вращении звена AB , равна $AM \cdot 2\pi a$.

Площадь поверхности, полученной при вращении звена BC , равна $MN \cdot 2\pi a$.

Площадь поверхности, полученной при вращении звена CD , равна $NP \cdot 2\pi a$.

Площадь поверхности, полученной при вращении звена DE , равна $PQ \cdot 2\pi a$.

Площадь поверхности, полученной при вращении звена EF , равна $QF \cdot 2\pi a$ (1, 2, 3, Т. 4).

6. Сложив эти равенства, получим, что площадь поверхности, образованная при вращении ломаной $ABCDEF$, вокруг оси AF равна $2\pi a(AM + MN + NP + PQ + QF) = 2\pi a \cdot AF$ (5).

7. При неограниченном увеличении числа звеньев вписанной в полуокружность правильной ломаной линии площадь поверхности, полученная её вращением, будет стремиться к площади поверхности шара. В то же время апофема правильной ломаной линии будет стремиться к своему пределу, т.е. к радиусу данной полуокружности, служащему радиусом R полученной шаровой поверхности (1, 2, 3, 4, 6, свойства предела).

8. Переходя в обеих частях равенства п.5 к пределу и приняв во внимание, что $AF = 2R$, получим: $S_{\text{шара}} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2$.

Итак:

$$S_{\text{пл. пов. шара}} = 4\pi R^2$$

где R – радиус шара.



Можно так прочесть эту формулу: поверхность шара равна учетверённой площади большого круга.

В учебнике геометрии для 10 класса мы неоднократно рассматривали *части сферы и шара**; сферический и шаровой сегмент, шаровой слой, сферический пояс. Найдём площади поверхностей некоторых из этих фигур, поступая, как и в случае определения площади поверхности шара.

Найдём формулу для нахождения **площади поверхности шарового сегмента**, получаемого при вращении дуги AC вокруг оси AF (рис. 2.42в).

1. Площадь поверхности, полученной при вращении звена AB , равна $AM \cdot 2\pi a$.

2. Площадь поверхности, полученной при вращении звена BC , равна $MN \cdot 2\pi a$.

3. Площадь поверхности, полученной при вращении ломаной ABC , равна $2\pi a (AM + MN)$.

4. Увеличивая неограниченно число звеньев правильной ломаной линии, вписанной в дугу AC , образующую при вращении сферическую поверхность шарового сегмента, в пределе получим: $S_{\text{пов. шар. сегм.}} = 2\pi R \cdot AN$.

5. Обозначив высоту AN сегмента буквой h , будем иметь:

$$S_{\text{пов.шар.сегм.}} = 2\pi R \cdot h,$$

где R – радиус шара, а h – высота шарового сегмента.

6. Рассмотрим теперь формулу нахождения **площади поверхности шарового слоя**.

* Геометрия, 10 класс, глава 5.

Сферическую поверхность шарового слоя, т.е. сферический пояс, можно рассматривать как разность поверхностей двух сегментов с высотами h_1 и h_2 . Следовательно, $S_{\text{пов. сф. пояса}} = 2\pi R(h_2 - h_1)$, или, приняв во внимание, что разность высот сегментов $h_2 - h_1 = h$ равна высоте шарового слоя, получим:

$$S_{\text{пов. сф. пояса}} = 2\pi R \cdot h,$$

где R – радиус шара, h – высота сферического пояса (она же высота шарового слоя).

Решим следующую задачу.

ЗАДАЧА

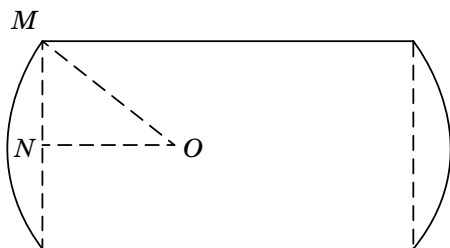


Рис. 2.43

Определите массу котла, поверхность которого состоит из цилиндрической поверхности и поверхности двух шаровых сегментов (рис. 2.43)

Известно, что радиус цилиндрической поверхности $r = 60$ см, длина образующей этой поверхности $h = 2$ м, высота сегмента $h_1 = 20$ см и котёл сделан из листового железа, масса 1 м^2 которого равен 12 кг.

Решение

Для нахождения площади поверхности котла нужно найти площади поверхностей двух сферических сегментов, т.к. площадь поверхности цилиндрической части находится без труда.

1. Определим радиус сферы, частями которой служат поверхности сегментов, для чего построим центр сферы – точку O (рис. 2.39) (построение).

2. Из прямоугольного треугольника MON имеем:

$$R^2 = r^2 + (R - h_1)^2, \text{ или } R^2 = r^2 + R^2 - 2Rh_1 + h_1^2, \text{ откуда } R = \frac{r^2 + h_1^2}{2h_1},$$

(1, теорема Пифагора).

3. Подставив в равенство п. 3 вместо r и h_1 данные значения, получим

$$R = \frac{0,6^2 + 0,2^2}{0,4} = 1 \text{ (2)}.$$

4. Площадь поверхности S всего котла будет: $S = 2\pi rh + 2\pi Rh_1 = 2\pi(rh + 2Rh_1)$ (данные задачи, формулы площади поверхности цилиндра и сегмента).

5. Заменив в последнем равенстве r , h и h_1 их данными значениями и R , получим:

$$S = 6,28 \cdot (0,6 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 0,2) \approx 10,05;$$

$$S \approx 10,05 \text{ м}^2 \text{ (с точностью до } 1 \text{ дм}^2 \text{) (4)}.$$

6. Умножив массу 1 м^2 листового железа на число квадратных метров поверхности котла, получаем его массу:

$$P = 12 \cdot 10,05 = 120,6 \approx 121;$$

Итак, $P \approx 121$ кг. ■

ЗАДАЧИ К § 2.1.-§ 2.2

Н



- 1** На рис. 2.44 изображён конус.
- Назовите вершину конуса, его образующие, ось конуса.
 - Какая фигура лежит в основании конуса?
 - Каково взаимное расположение высоты конуса и плоскости основания?
 - Вращением какого треугольника получен конус?
 - Назовите равные отрезки и прямые углы на рисунке 1.44.

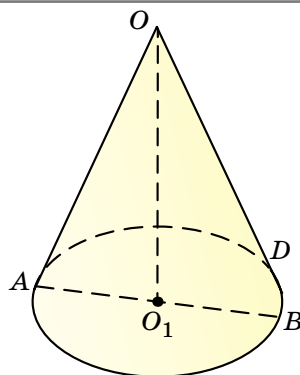


Рис. 2.44

Н



- Может ли образующая конуса равняться: а) высоте конуса; б) радиусу окружности основания? Ответы обоснуйте.
- Может ли в сечении конуса плоскостью получиться равнобедренный треугольник, отличный от осевого сечения?
- Может ли осевым сечением конуса быть прямоугольный треугольник?
- Может ли в сечении конуса получиться равносторонний треугольник?
- Может ли в сечении конуса получиться равнобедренная трапеция?
- Как нужно пересечь конус плоскостью, чтобы в сечении получился: а) круг; б) эллипс?
- Какой фигурой является: а) осевое сечение конуса; б) сечение конуса плоскостью, параллельной основанию; в) сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса?

Н

- Начертите конус, если: а) $r = 15$ мм, $h = 18$ мм; б) $r = 12$ мм, $h = 15$ мм.
- Высота конуса равна 8 м, радиус основания – 6 м. Найдите образующую конуса.

- 11** Образующая конуса равна 8 м и наклонена к плоскости основания под углом 60° . Найдите площадь основания конуса.
- 12** Найдите образующую конуса, если высота конуса равна h и радиус окружности основания равен r . Произведите вычисления для случая:
а) $h = 10$, $r = 6$; б) $h = 12,4$, $r = 4,8$.
- 13** Найдите высоту конуса, если его образующая равна 13 дм, а радиус основания 5 дм.
- 14** Радиус основания конуса равен 4 см. Осевым сечением служит равносторонний треугольник. Найдите площадь осевого сечения.
- 15** Радиус основания конуса r , его осевое сечение — прямоугольный треугольник. Найдите площадь сечения.
- 16** Радиус основания конуса в 2 раза меньше его высоты. Найдите отношение площади осевого сечения конуса к площади его основания.
- 17** Высота конуса h . На каком расстоянии от вершины надо провести плоскость параллельно основанию, чтобы площадь сечения была равна четверти площади основания?
- 18** В конусе осевое сечение — правильный треугольник со стороной $2r$. Найдите площадь сечения, проведённого через две образующие боковой поверхности, угол между которыми равен 30° .
- 19** Высота конуса h , угол между высотой и образующей боковой поверхности равен 60° . Найдите площадь сечения, проведённого через две взаимно перпендикулярные образующие.
- 20** В конусе, у которого высота равна радиусу основания r , проведена через вершину плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 90° . Найдите площадь полученного сечения.
- 21** Докажите, что плоскость, касательная к конусу, перпендикулярна к плоскости, проходящей через образующую, по которой она касается конуса, и через ось конуса.
- 22** Докажите, что касательная к окружности основания конуса перпендикулярна к образующей, проходящей через точку касания.
- 23** Нарисуйте фигуры, которые могут быть сечениями конуса плоскостью.
- 24** Нарисуйте фигуры, образованные при вращении заданных на рисунке 2.45 плоских фигур вокруг оси l . В каких случаях получится конус?
- 25** Докажите, что отношение площади основания конуса к площади осевого сечения равно π , если осевым сечением является прямоугольный треугольник.

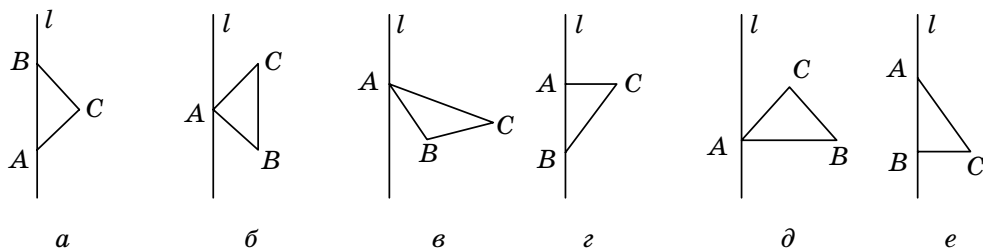


Рис. 2.45

- 26** а) Образующая конуса равна l , угол при вершине осевого сечения φ . Найдите площадь основания.
 б) Площадь основания конуса Q , образующая l . Найдите площадь осевого сечения.
- 27** Радиус основания конуса R , угол наклона образующей к плоскости основания α . Плоскость проходит через вершину конуса и пересекает основание под углом φ . Найдите площадь сечения.
- 28** а) Угол при вершине осевого сечения конуса острый. Докажите, что любое сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, имеет площадь, не большую площади осевого сечения.
 б) Образующая конуса равна l . Каким должен быть угол наклона образующей к плоскости основания, чтобы осевое сечение конуса имело наибольшую площадь?

П

- 29** На рисунке 2.46 изображён конус. Как построить на этом изображении ось конуса?
- 30** Начертите изображение конуса и постройте на полученном изображении: а) высоту; б) образующую; в) проекцию образующей на основание конуса.
- 31** Постройте точки пересечения данного конуса с прямой линией.
- 32** Через данную точку вне конуса проведите плоскость, касающуюся конуса.
- 33** Дана ось конуса и две точки, лежащие на поверхности конуса. Постройте вершину конуса.

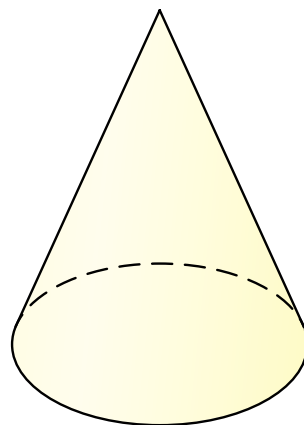


Рис. 2.46

- 34** Найдите угол при вершине в осевом сечении конуса, если известно, что на его поверхности можно провести три попарно перпендикулярные образующие.
- 35** Найдите геометрическое место точек, лежащих на осях равных конусов, лежащих на плоскости так, что их вершина находится в точке A этой плоскости.
- 36** Два одинаковых конуса с углом α при вершине в осевом сечении расположены так, что осью каждого из них является образующая другого. Найдите угол между двумя образующими, по которым эти конусы пересекаются.
- 37** Докажите, что угол между двумя образующими, принадлежащими осевому сечению конуса, больше угла между образующими, не принадлежащими осевому сечению.
- 38** Дана точка, принадлежащая основанию конуса. Постройте точку пересечения боковой поверхности конуса и прямой, проходящей через данную точку и середину его высоты.
- 39** Точки M, N, P принадлежат различным образующим конуса. Постройте точку пересечения плоскости MNP с заданной образующей (или с её продолжением), не проходящей ни через одну из данных точек.
- 40** Развёрткой боковой поверхности конуса служит полукруг. Найдите угол при вершине осевого сечения.
- 41** а) Через вершину конуса проведены две плоскости, образующие равные углы с плоскостью его основания. Докажите, что сечения конуса этими плоскостями равны.
 б) Через образующие SA и SC , SC и SD конуса проведены плоскости. Известно, что $\angle ASB = \angle CSD$. Докажите, что плоскости ASB и CSD образуют равные углы с плоскостью основания конуса.
- 42** Через вершину конуса проведена плоскость. Найдите угол при вершине получившегося сечения, если известно, что углы развёрток полученных частей боковой поверхности конуса равны 30° и 60° .
- 43** Через вершину конуса проведено сечение под углом φ к высоте. Найдите площадь сечения, если образующая конуса, равная l , составляет угол β с плоскостью основания.
- 44** Дан конус, образующая которого равна l , а радиус основания R . При каком условии у данного конуса существуют две взаимно перпендикулярные образующие?
- 45** Радиус основания конуса равен R , высота h . Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая боковую поверхность по двум взаимно

перпендикулярным образующим. Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

- 46** Напомним, что конусностью детали, имеющей форму конуса, называют отношение диаметра его основания к высоте. Решите следующие задачи, связанные с понятием конусности.
- а) Найдите образующую конуса, у которого высота равна 245 мм, а конусность $1 : 10$.
- б) Вычислите конусность детали, у которой угол при вершине осевого сечения равен 12° .
- в) Выведите формулу, выражающую зависимость между конусностью и углом при вершине осевого сечения.
- 47** Докажите, что если замкнутая неплоская ломаная из четырёх звеньев касается поверхности конуса или цилиндра, то четыре точки касания принадлежат одной плоскости.
- 48** К конусу (цилиндру) проведены две скрещивающиеся касательные. Докажите, что точки касания всех касательных к конусу (цилиндру), пересекающих обе данные касательные, принадлежат двум плоскостям.
- 49** Радиус основания конуса r , а образующая наклонена к плоскости основания под углом α . Найдите площадь сечения, проходящего через вершину конуса под углом β к его высоте.

ЗАДАЧИ К § 2.3

- 50** Как изменится боковая поверхность конуса, если: а) образующая увеличится в n раз, а радиус окружности основания останется без изменения; б) образующая увеличится в n раз, а радиус основания уменьшится во столько же раз; в) образующая и радиус основания увеличатся в n раз?
- 51** Круговой сектор с радиусом 3 дм и центральным углом, равным α , свёрнут так, что образовалась боковая поверхность конуса. Определите радиус окружности основания конуса, если: а) $\alpha = 180^\circ$; б) $\alpha = 120^\circ$.
- 52** Боковая поверхность конуса разрезана по его образующей и затем развёрнута так, что образовался круговой сектор. Определите радиус основания взятого конуса, если радиус полученного сектора равен 20 см, а его центральный угол равен: а) 45° ; б) 60° ; в) 90° .
- 53** Радиус основания конуса 22,5 мм, высота 60 мм. Сделайте чертёж развёртки полной поверхности этого конуса.
- 54** Вычислите боковую и полную поверхности конуса, образующая которого равна 1,6 дм и радиус основания 4 см.

- 55** Определите боковую поверхность конуса, если известна его образующая l и угол α , который составляет образующая с плоскостью основания.
- 56** Крыша имеет форму конуса, образующая которого 3 м и радиус основания 2 м. Сколько краски потребуется для окраски этой крыши, если для покраски 1 м^2 требуется около 200 г краски?
- 57** Площадь осевого сечения равна 32 см^2 , а угол между высотой и образующей равен 45° . Найдите площадь полной поверхности конуса.
- 58** Прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему углом 60° вращается вокруг оси, проходящей через вершину данного острого угла перпендикулярно катету. Найдите площадь поверхности полученного тела вращения.
- 59** Прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим ему углом 30° вращается вокруг оси, содержащей известный катет. Найдите площадь поверхности тела вращения.
- 60** Развёрткой боковой поверхности конуса служит сектор, радиус которого 12 см, а угол 135° . Найдите радиус основания и высоту конуса.
- 61** Нужно изготовить коническую воронку диаметром 14 см и высотой 12 см. Каковы должны быть размеры развёртки (угол и радиус)?
- 62** а) Найдите отношение площадей фигур, образованных вращением границы ромба с острым углом $\alpha = 45^\circ$ вокруг диагоналей ромба.
б) Найдите площадь фигуры, образованной вращением границы прямоугольного треугольника с гипотенузой c и углом 30° вокруг прямой, проходящей через вершину этого угла и параллельной противолежащему катету.
- 63** Выведите формулы для вычисления площадей боковой и полной поверхности конуса, если известны площадь основания Q и угол φ между образующей и плоскостью основания.
- 64** На каком расстоянии от вершины конуса нужно провести сечение, параллельное основанию, чтобы оно разделило боковую поверхность конуса на две части, имеющие равные площади? (Высота конуса равна H .)
- 65** Жестяная воронка имеет высоту 15 см и образующую 17 см. Сколько жести затрачено на изготовление воронки (на швы уходит 10% площади поверхности воронки)?
- 66** *Практическая работа.* Произведите необходимые измерения и вычислите площадь поверхности модели: а) цилиндра; б) конуса; в) усечённого конуса.
- 67** Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса, радиусы оснований которого равны r и R , а образующая l .

- 68** Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующую увеличить вдвое, а радиус основания одновременно увеличить в 3 раза?
- 69** Вычислите площади боковой и полной поверхностей конуса, длина образующей которого равна 10 см, а радиус основания 3 см.
- 70** Коническая крыша башни имеет диаметр 6 м и высоту 2 м. Сколько листов кровельного железа потребуется для этой крыши, если размер листа $0,7 \times 1,4$ м, а на швы и обрезки тратится 10% от площади крыши?
- 71** а) Прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим ему углом 30° вращается вокруг гипотенузы. Найдите площадь фигуры, полученной при вращении ломаной, составленной из катетов этого треугольника.
 б) Равнобедренный треугольник, длина основания которого b , а угол при вершине φ , вращается вокруг основания. Найдите площадь фигуры, полученной при вращении ломаной, состоящей из боковых сторон данного треугольника.
- 72** Через две образующие конуса, угол между которыми равен α , проведена плоскость. Площадь получившегося сечения S , площадь основания конуса Q . Найдите площадь боковой поверхности конуса, если $\alpha = 28^\circ 42'$, $S = 12,56 \text{ см}^2$, $Q = 15,31 \text{ см}^2$.
- 73** Найдите площадь полной поверхности конуса, если угол между образующей и плоскостью основания равен α , а площадь осевого сечения Q .
- 74** Треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см вращается вокруг оси, проходящей через вершину меньшего угла и перпендикулярной к стороне, имеющей длину 14 см. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.
- 75** Треугольник со сторонами 3 дм и 5 дм и углом 120° между ними вращается вокруг оси, проходящей через вершину большего угла и одинаково наклонённой к обеим сторонам треугольника. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.
- 76** Равнобедренная трапеция, меньшее основание и боковые стороны которой равны a , острый угол α , вращается вокруг оси, проходящей через вершину острого угла и перпендикулярной основанию. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.
- 77** Площадь основания конуса равна Q , площадь осевого сечения S . Найдите площадь боковой поверхности конуса.
- 78** Образующая конуса равна 20 см, площадь полной поверхности 400 см^2 . Найдите угол развёртки конуса.

- 79** Площадь полной поверхности конуса равна Q , площадь боковой поверхности q . Найдите: а) угол при вершине осевого сечения; б) угол развёртки боковой поверхности.
- 80** Площадь полной поверхности конуса равна S , площадь осевого сечения Q . Найдите площадь основания конуса.
- 81** Угол при вершине осевого сечения конуса равен φ , площадь полной поверхности Q . Найдите высоту конуса.
- 82** Площадь боковой поверхности конуса равна Q , угол при вершине осевого сечения равен β . Найдите площадь сечения, проведённого через две образующие, угол между которыми равен φ .
- 83** Найдите угол между образующей и плоскостью основания конуса, у которого площадь осевого сечения в 4 раза меньше площади полной поверхности.
- 84** Боковая поверхность конуса вдвое больше площади его основания. Найдите угол его развёртки.

ЗАДАЧИ К § 2.5

Н

- 85** Дан конус, образующая которого равна l , а радиус основания R . Найдите ребро куба, вписанного в этот конус так, что одна грань куба лежит в основании конуса, а вершины противоположащей грани принадлежат его боковой поверхности.
- 86** Образующая конуса равна l и наклонена к плоскости основания под углом α . Найдите длину ребра куба, вписанного в конус так, что четыре его вершины лежат на основании, а четыре — на боковой поверхности конуса.
- 87** Площадь боковой поверхности конуса Q , а его радиус r . Найдите длину бокового ребра вписанной в этот конус правильной пирамиды:
а) треугольной; б) четырёхугольной; в) n -угольной.
- 88** Используя условие задачи 87, найдите площадь боковой поверхности вписанной в данный конус правильной n -угольной пирамиды.
- 89** Площадь основания конуса равна q , угол при вершине осевого сечения α . Найдите площадь полной поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, вписанной в конус.

П

- 90** В правильной треугольной пирамиде вершина основания находится на расстоянии b от противоположащей боковой грани. В пирамиду вписан конус, образующая которого составляет угол α с плоскостью основания. Найдите объём и площадь полной поверхности конуса.
- 91** Дан конус, радиус основания которого относится к высоте как $1 : \sqrt{2}$. Найдите угол между плоскостями боковых граней правильной треугольной пирамиды, вписанной в конус.
- 92** В конус с высотой H и радиусом основания R вписан цилиндр, высота которого h . Найдите радиус основания цилиндра.
- 93** Цилиндр с высотой h и радиусом основания r вписан в конус, радиус основания которого равен R . Найдите высоту конуса.
- 94** В конус с радиусом R и высотой H вписан цилиндр радиусом r и высотой h . Докажите, что $\frac{r}{R} + \frac{h}{H} = 1$.

ЗАДАЧИ К § 2.6

Н



- 95** На рис. 2.47 изображён усечённый конус.
- Какие фигуры являются основаниями конуса?
 - Есть ли на этом рисунке параллельные плоскости?
 - Есть ли на этом рисунке прямые, перпендикулярные плоскости? Назовите их.
 - Назовите ось этого усечённого конуса.
 - Какая фигура является осевым сечением конуса?

- 96** Какую площадь имеет развёртка боковой поверхности ведра, если диаметры его оснований равны 28 см и 20 см, а высота 24 см. Сколько квадратных сантиметров материала нужно затратить на изготовление этого ведра (без учёта расхода на швы)?

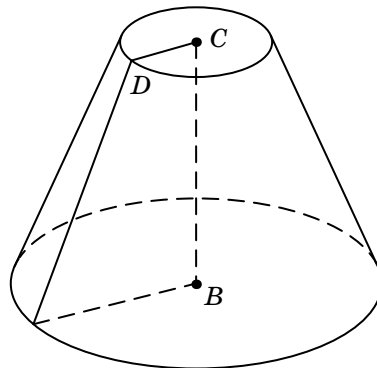


Рис. 2.47

- 97** Радиусы оснований усечённого конуса R и r . Найдите площадь боковой поверхности этого конуса, если его образующая наклонена к плоскости основания под углом 60° .

- 98** Радиусы оснований усечённого конуса равны 3 дм и 6 дм, а образующая 5 дм. Найдите: а) высоту усечённого конуса; б) площадь его осевого сечения; в) угол наклона образующей и плоскости основания.
-

Н

- 99** Радиусы оснований усечённого конуса 5 см и 2 см, высота 4 см. Найдите радиусы и градусные меры дуг, развертки боковой поверхности. Изготовьте макет усечённого конуса.
- 100** Радиусы оснований усечённого конуса R и r , площадь осевого сечения S . В усечённый конус вписана усечённая пирамида, основанием которой служит прямоугольный треугольник с острым углом α . Найдите площадь боковой поверхности усечённой пирамиды.
- 101** Докажите, что сечения конуса плоскостями, проходящими через его вершину, равны, если эти плоскости одинаково наклонены к плоскости основания конуса.
- 102** а) Высота усечённого конуса 6 см, радиусы оснований 10 см и 2 см. Найдите площади его боковой и полной поверхностей.
б) Высота усечённого конуса равна h , радиусы оснований относятся как $1 : 3$, угол между образующей и плоскостью основания равен 45° . Найдите площадь поверхности усечённого конуса.
- 103** Прямоугольная трапеция вращается вокруг меньшей из непараллельных сторон. Найдите площадь поверхности полученной фигуры вращения, если меньшее основание трапеции равно 2 см, а боковая сторона длиной 12 см образует с основанием угол 60° .
-

П

- 104** Радиусы оснований усечённого конуса равны R и r , образующая равна l . Найдите образующую и высоту полного конуса, от которого отделён усечённый конус.
- 105** а) Образующая усечённого конуса длиной l составляет с плоскостью основания угол φ , диаметр меньшего основания равен d . Найдите площадь осевого сечения.
б) Радиусы оснований усечённого конуса относятся как $1 : 3$, образующая составляет с плоскостью основания угол 45° , высота равна h . Найдите площади оснований.
- 106** Радиусы оснований усечённого конуса равны R и r . Высота разделена на три равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Найдите площади сечений.

- 107** Площадь осевого сечения усечённого конуса равна Q . Найдите площадь сечения, которое проходит через хорды оснований, стягивающие дуги, равные 2α , если известно, что угол между плоскостями сечения и основания равен β .
- 108** Диагонали осевого сечения усечённого конуса образуют угол φ , большая из площадей оснований равна Q , угол между образующей и плоскостью основания равен β . Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.
- 109** Какую высоту будет иметь ведро, если у заготовки для изготовления его боковой поверхности угловые значения дуг равны 72° , а радиусы 92 см и 65 см?
- 110** Площадь осевого сечения усечённого конуса равна S , угол между образующей и плоскостью основания φ . Найдите площадь боковой поверхности.
- 111** Из круглого листа алюминия изготовлен путём штампования стакан, диаметр дна которого 40 мм, диаметр верхней (открытой) части 60 мм, а высота стакана 65 мм. Найдите диаметр листа.
- 112** Треугольник со сторонами 3 дм и 5 дм и углом 120° между ними вращается вокруг оси, проходящей через вершину большого угла и одинаково наклонённой к обеим сторонам треугольника. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.
- 113** Равнобедренная трапеция, меньшее основание и боковые стороны которой равны a , острый угол α , вращается вокруг оси, проходящей через вершину острого угла и перпендикулярной основанию. Найдите площадь поверхности фигуры вращения.
- 114** Плоскость, проведённая через две образующие усечённого конуса, угол между которыми равен α , пересекает основания по хордам длиной a и b ($a > b$). Каждая из этих хорд стягивает дугу β . Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.

ЗАДАЧИ К § 2.7 - § 2.8



- 115** Как изменится площадь поверхности шара, если его радиус:
- уменьшить в два раза;
 - увеличить на 200 %;
 - увеличить в 1,5 раза;
 - уменьшить на 25 %?

- 116** Чему равно отношение площади поверхности шара к площади его большого круга?
- 117** Радиус шара равен 3,5 дм. Найдите площадь его поверхности (с точностью до 0,1 дм²)
- 118** Найдите площадь поверхности шара радиусом 4.
- 119** Найдите площадь поверхности шара, если его диаметр равен 20 см.

Н

- 120** Сколько метров шёлковой материи шириной в 0,5 м потребуется для изготовления воздушного шара (шаровидной формы), если диаметр шара равен 6 м, а на швы и обрезки следует прибавить 12,5 %? Результат получите с точностью до 1 м с избытком.
- 121** Радиус шара равен радиусу основания цилиндра. Какова должна быть высота цилиндра, чтобы площадь его полной поверхности равнялась площади поверхности шара?
- 122** Большой склад имеет форму полушария. Сколько литров краски потребуется, чтобы его покрасить снаружи, если на окраску его пола ушло 50 л краски?
- 123** Диаметр шара равен 20 см. Высота сегмента этого шара 6 см. Найдите площадь сферической поверхности сегмента.

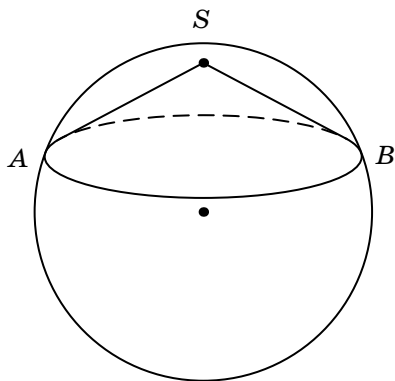


Рис. 2.48

- 124** Площадь сферической поверхности сегмента вдвое больше площади боковой поверхности конуса SAB , вписанного в шар и имеющего общее основание с сегментом (рис. 2.48). Найдите дугу ASB осевого сечения сегмента.
- 125** Площадь сферы равна 3,14 дм². Найдите её радиус.
- 126** В каком случае расходуется больше материала: на никелировку одного шара диаметром 8 см или на никелировку 15 шаров диаметром 2 см каждый?
- 127** Как относятся площади сфер, вписанной в куб и описанной около этого же куба?
- 128** Как относятся площади сфер, вписанной в правильный октаэдр и описанной около него?

- 129** Найдите площадь сферы, описанной около прямоугольного параллелепипеда, измерения которого 3 дм, 4 дм и 5 дм.
- 130** Осевое сечение конуса – равносторонний треугольник. Докажите, что площадь поверхности сферы, описанной около этого конуса, в 4 раза больше площади сферы, вписанной в него.
- 131** Длина образующей конуса равна диаметру основания. Докажите, что площадь поверхности конуса равна площади поверхности сферы, диаметр которой равен высоте конуса.
- 132** Докажите, что площадь поверхности сферы радиуса R равна площади поверхности цилиндра, высота и радиус которого равны R .
- 133** Шар касается всех граней куба. Найдите отношение площадей поверхностей этих фигур.
- 134** Найдите площадь поверхности сферы, вписанной в правильную пирамиду, апофема которой m наклонена к плоскости основания под углом α . Вычислите при $m = 15$ см, $\alpha = 60^\circ$.
- 135** Найдите площадь поверхности сферы, описанной около цилиндра, радиус и высота которого равны соответственно r и h .

П

- 136** В правильной четырёхугольной пирамиде боковое ребро равно b и наклонено к плоскости основания под углом α . Найдите площадь поверхности сферы, описанной около пирамиды.
- 137** В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a , двугранный угол при ребре основания равен α . Найдите площадь поверхности шара, вписанного в пирамиду.
- 138** В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна a , а плоский угол при вершине пирамиды α . Найдите площадь поверхности вписанного шара.
- 139** Из центра O сферы радиуса r проведены три попарно перпендикулярных луча: OA , OB , OC . Найдите площадь меньшей части сферы, ограниченной плоскими углами AOB , BOC , COA .
- 140** Докажите, что объёмы шара и многогранника, описанного около него, относятся как площади их поверхностей.
- 141** Найдите площадь поверхности сферического сегмента радиуса r , если длина ограничивающей его окружности равна l .

- 142** Двояковыпуклая линза ограничена двумя равными сегментными сферическими поверхностями. Диаметр линзы равен 50 мм, а толщина 9 мм. Найдите площадь поверхности линзы.
- 143** Найдите площадь сферического пояса, если радиус сферы равен R , а высота пояса (расстояние между плоскостями сечений) равна H .
- 144** Известно, что поверхность полусферы равновелика поверхности сферического пояса, который получен при вращении дуги в 90° вокруг диаметра, параллельного хорде дуги. Найдите отношение радиусов полусферы и сферического пояса.
- 145** Площадь сечения шара равна Q , угол, под которым виден из центра шара диаметр сечения, равен α ($\alpha < 180^\circ$). Найдите площадь меньшей сегментной поверхности, отделённой от сферы этим сечением.
- 146** Круговой сектор с дугой 120° и площадью S вращается вокруг прямой содержащей: а) крайний радиус; б) средний радиус. Найдите площади поверхностей фигур вращения.
- 147** В конус вписан шар. Линией их касания площадь поверхности шара делится в отношении $m : n$. Найдите угол между образующей конуса и его осью.
- 148** В конус, осевым сечением которого является прямоугольный треугольник, вписан шар. Найдите отношение площади поверхности шара и площади полной поверхности конуса.
- 149** Найдите отношение площадей поверхностей шара и описанного цилиндра.
- 150** Вокруг равностороннего цилиндра описана сфера. Найдите площадь поверхности сферы, если площадь полной поверхности цилиндра равна Q .
- 151** Вода покрывает примерно три четверти земной поверхности. Сколько миллионов квадратных километров земной поверхности занимает суша? (Считайте, что диаметр Земли равен 12 750 км.)
- 152** В прямой круговой цилиндр вписан шар. Найдите отношение площади поверхности шара к площади боковой поверхности цилиндра.

М

- 153** Найдите отношение площадей поверхностей шара и вписанного в него равностороннего цилиндра.
- 154** В равносторонний цилиндр вписана сфера. Найдите площадь поверхности сферы, если площадь полной поверхности цилиндра равна Q .

- 155** Дана сфера радиуса R . Найдите радиус основания и высоту вписанного в сферу цилиндра, имеющего наибольшую площадь полной поверхности.
- 156** В данную сферу вписан конус, имеющий наибольшую площадь поверхности. Найдите угол при вершине его осевого сечения.
- 157** Площадь поверхности шара, вписанного в конус, равна площади основания конуса. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью его основания.
- 158** Сфера вписана в усечённый конус, радиусы оснований которого равны R и r . Найдите отношение площади поверхности сферы к площади боковой поверхности усечённого конуса.
- 159** Высота конуса 16 мм, образующая 20 мм. Найдите: а) радиус вписанного шара; б) длину линии касания.
- 160** В конусе образующая имеет длину l и составляет с основанием угол α . Найдите: а) радиус описанного шара; б) радиус вписанного шара.
- 161** В шар радиусом R вписан конус с высотой h . Найдите площадь осевого сечения конуса.
- 162** Докажите, что конус, ось которого проходит через центр сферы, пересекает эту сферу по окружности или по нескольким окружностям. Сколько может быть таких окружностей?
- 163** Около шара радиуса r описан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α . Найдите площадь осевого сечения конуса. Вычислите при $r = 2$ м, $\alpha = 50^\circ$.
- 164** В конус вписан шар. Площадь поверхности шара относится к площади основания конуса как 4 : 3. Найдите угол между плоскостью основания и образующей конуса.
- 165** В конусе площадь осевого сечения равна S ; образующая конуса видна из центра описанного шара под углом α . Найдите площадь поверхности шара.
- 166** На высоте конуса, как на диаметре, построена сфера. Найдите площадь поверхности сферы, заключённой внутри конуса, если угол при вершине конуса равен α , а высота конуса равна h .
- 167** Радиус шара 1 м. Светящаяся точка находится на расстоянии 1 м от поверхности шара. Найдите площадь освещённой части поверхности шара.
- 168** Сфера с центром в вершине конуса касается его основания и делит поверхность конуса на две части, имеющие равные площади. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

- 169** Пусть шар касается боковой поверхности прямого кругового конуса. Докажите, что если плоскость проходит через высоту конуса и центр шара, то она содержит точку касания.
- 170** На основании прямого кругового конуса лежат три шара радиусом R . На них лежит четвёртый шар того же радиуса. Каждый из этих четырёх шаров касается боковой поверхности конуса и трёх других шаров. Найдите высоту конуса.
- 171** Около шара радиуса r описан усечённый конус, образующая которого составляет с большим основанием угол α . Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.
- 172** Конус называют вписанным в шар, если основанием конуса служит сечение шара, а вершина конуса принадлежит поверхности шара. В данный шар вписан конус, имеющий наибольшую площадь боковой поверхности. Найдите угол при вершине осевого сечения этого конуса.
- 173** Центр сферы совпадает с центром основания кругового конуса, а её радиус равен радиусу основания конуса. Найдите радиус окружности, по которой сфера пересекает поверхность конуса, если известны высота конуса h и угол его осевого сечения.
- 174** Центр сферы совпадает с центром основания конуса, а её радиус равен радиусу основания конуса. Найдите радиус окружности, по которой сфера пересекает поверхность конуса, если известна длина образующей l и угол осевого сечения α .
- 175** В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α , вписан шар. Второй шар касается первого и всех образующих конуса. Найдите отношение радиусов шаров.
- 176** Поверхность шара, вписанного в конус, боковая поверхность конуса и его полная поверхность образуют геометрическую прогрессию. Найдите угол наклона образующей конуса к плоскости его основания.
- 177** Найдите расстояние между центрами сфер, вписанной в конус и описанной около него, если высота конуса h , а радиус его основания R .
- 178** При каких условиях отношение радиуса R сферы, описанной около конуса, к радиусу r сферы, вписанной в этот же конус, минимально?
- 179** Центр сферы, описанной около конуса, лежит на поверхности вписанного в этот конус шара. Найдите угол наклона образующей конуса к плоскости его основания.
- 180** Около шара описан конус, в тот же шар вписан конус, подобный описанному. При каком условии отношение высот описанного и вписанного конусов наименьшее? Найдите это наименьшее отношение.

- 181** В конус вписан шар. Отношение радиуса окружности касания шаровой и конической поверхностей к радиусу основания конуса равно k . Найдите косинус угла между образующей конуса и плоскостью его основания.
- 182** В равносторонний конус вписан полушар так, что большой круг полушара находится в плоскости основания конуса. В каком отношении окружность касания делит поверхность полушара и боковую поверхность конуса?
- 183** В конус вписан шар. Линией касания поверхности этого шара делится в отношении $m : n$. Определите угол наклона образующей конуса к его оси.
- 184** Сечение, перпендикулярное высоте конуса, делит конус на две равновеликие части и проходит через центр описанного около конуса шара. Найдите угол между образующей и плоскостью основания конуса.
- 185** В конусе образующая равна l , а высота в m раз больше радиуса вписанного шара. Найдите отношение полной поверхности конуса к поверхности шара, описанного около конуса.
- 186** Найдите высоту такого конуса, вписанного в шар радиуса R , основание которого отсекает от шара шаровой сегмент, равновеликий конусу.
- 187** В конус вписана сфера; плоскость, проходящая через вершину конуса, делит его боковую поверхность на части, отношение площадей которых $1 : 2$. Сферу эта плоскость делит на части, отношение площадей которых $1 : 5$. Найдите угол раствора конуса (так называют угол при вершине осевого сечения конуса).
- 188** Угол раствора конуса равен $\frac{\pi}{3}$. Внутри конуса расположены три сферы радиуса r ; каждая сфера касается двух других сфер, основания конуса и его боковой поверхности. Найдите радиус основания конуса.
- 189** В конус вписана полусфера, большой круг которой лежит на основании конуса. Определите угол при вершине конуса, если полная поверхность конуса относится к боковой поверхности полушара как $18 : 5$.
- 190** В конус с высотой h и радиусом основания $2h$ вписан шар. Найдите площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через вершину конуса под углом $\frac{\pi}{4}$ к его оси.
- 191** Найдите угол наклона образующей конуса к плоскости его основания, если площадь основания конуса, поверхность вписанного в него шара и боковая поверхность этого конуса образуют арифметическую прогрессию.

- 192** Площадь основания в конусе S_1 , а площадь его боковой поверхности S_2 . Найдите радиус вписанного шара.
- 193** Пусть в конусе: h – высота, l – образующая, R_1 – радиус основания, α – угол между образующей и основанием; r – радиус вписанного, r' – радиус невписанного и R – радиус описанного шаров. Найдите r , r' , R , если дано: h и l , h и R_1 , h и α , l и R_1 , l и α , R_1 и α .
- 194** Какой высоты должен быть конус, описанный около шара радиуса r , чтобы отношение полной поверхности конуса и поверхности шара равнялось k ?
- 195** Докажите, что центры вписанной в конус и описанной около него сфер лежат на высоте конуса, причём центр вписанной сферы всегда находится внутри конуса, а описанной – внутри конуса, в плоскости его основания (в центре основания), вне конуса, если угол при вершине в осевом сечении конуса острый, прямой, тупой соответственно.
- 196** Докажите, что вписанная в конус и описанная около него сферы концентричны тогда и только тогда, когда выполняется любое из условий:
- а) конус равносторонний;
 - б) отношение радиусов описанной около конуса и вписанной в него сфер минимально;
 - в) $R : r = 2$, где R – радиус описанной около конуса сферы и r – радиус вписанной в конус сферы.

ГЛАВА 3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

...В XIX столетии выяснилось, что понятие преобразования играет в геометрии основную роль; оно может быть положено в основу определения самого предмета геометрии... Выдвижение на первый план геометрических преобразований имеет ещё ту ценность, что позволит указать некоторые общие методы, дающие ключ к решению сразу многих геометрических задач на построение и доказательство. При этом подобные решения во многих случаях являются более естественными, а потому более простыми, чем иные решения.

Исаак Моисеевич Яглом
(русский математик и педагог, 1921–1988)

Стоя перед чёрной доской и рисуя на ней мелом разные фигуры, я вдруг был поражён мыслью: почему симметрия приятна глазу? Что такое симметрия? Это врождённое чувство, отвечал я сам себе. На чём же оно основано?

Лев Николаевич Толстой,
(русский писатель, 1828–1910)

§ 3.1



ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В курсе геометрии 7–9 классов мы довольно часто встречались с различными геометрическими преобразованиями – параллельным переносом, центральной и осевой симметрией, поворотом. При этом в основном рассматривались вопросы, связанные со свойствами плоских фигур, но иногда приходилось работать и в пространстве, скажем, при изучении центральной симметрии.

Перед тем, как приступить к изучению геометрических преобразований, мы рассмотрим более общее понятие *геометрического отображения*, или просто *отображения*.

При этом мы будем использовать понятие *соответствия*. Это понятие не определяется, но его смысл хорошо понятен: например, каждому человеку соответствует его имя.

Определение 15. Пусть в пространстве заданы две геометрические фигуры F и F_1 . Если каждой точке X фигуры F ставится в соответствие единственная, вполне определённая точка X_1 фигуры F_1 и при этом каждая точка X_1 фигуры F_1 соответствует какой-либо точке X фигуры F , то такое соответствие называют *отображением* фигуры F на фигуру F_1 .

Обратите внимание, что это определение отображения очень похоже на определение функции в курсе «Алгебра и начала математического анализа». По сути, отображение фигуры F на фигуру F_1 можно трактовать как функцию с областью определения F и областью значений F_1 .

У точек, соответствующих одна другой при отображении, имеются специальные названия.

Определение 16. Если точке X фигуры F ставится в соответствие точка X_1 фигуры F_1 , то точка X_1 называется *образом* точки X , а точка X называется *прообразом* точки X_1 .

Точки X и X_1 называются соответствующими друг другу в данном преобразовании, их часто записывают в виде упорядоченной пары (X, X_1) . На первом месте в паре записывают прообраз, а на втором – образ. Если точке X соответствуют точка X_1 , то часто пишут и так: $X \rightarrow X_1$. Наконец, очень часто отображение обозначают каким-нибудь символом, чаще всего буквой (иногда с индексами). Если отображение названо, скажем, буквой h , то пишут $h(X) = X_1$, где X – прообраз, а X_1 – соответствующий ему образ. Принято также говорить, что образом фигуры F при отображении h является фигура F_1 , и писать при этом $h(F) = F_1$ или $F_1 = h(F)$.

Рассмотрим подробно два примера, которые помогут нам понять сущность понятия геометрического отображения.

Эти примеры будут связаны с рассмотренными в первых главах учебника геометрии для 10 класса вопросами взаимного расположения прямых и плоскостей, а также с вопросами параллельного проектирования.

Пример 1. Пусть нам дана плоскость α , треугольник ABC и прямая l , пересекающая плоскость α (рис. 3.1а). Рассмотрим параллельную проекцию треугольника ABC на плоскость α в направлении прямой l .

На рис. 3.1б эта проекция построена – $\Delta A_1B_1C_1$.

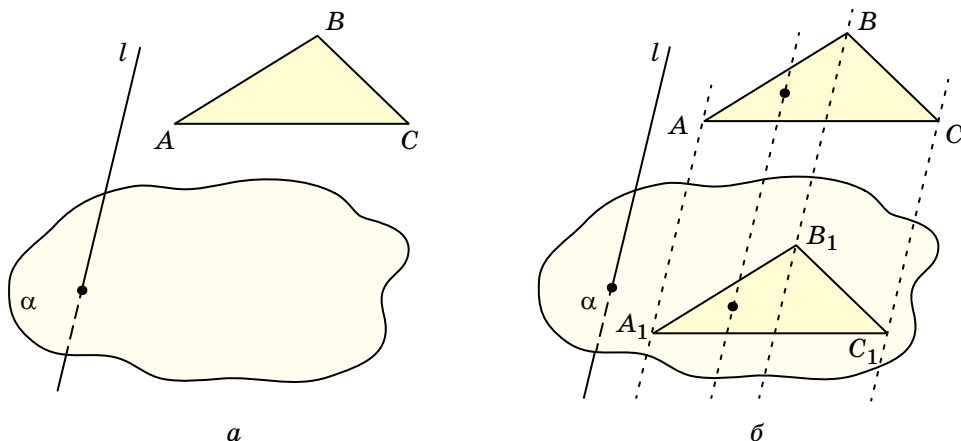


Рис. 3.1

Мы получили некоторое соответствие, при котором каждой точке X ΔABC соответствует единственная точка X_1 $\Delta A_1B_1C_1$. Тем самым задано отображение треугольника ABC на треугольник $A_1B_1C_1$. Точка X_1 являет-

ся образом точки X при этом отображении. Говорят также, что $\Delta A_1B_1C_1$ является образом ΔABC при данном отображении (рис. 3.16).

Пример 2. Пусть нам дана треугольная пирамида $ABCD$, плоскость α и прямая l , пересекающая плоскость α (рис. 3.2а).

Построим параллельную проекцию треугольной пирамиды $ABCD$ на плоскость α в направлении прямой l . Эта проекция изображена на рис. 3.2б.

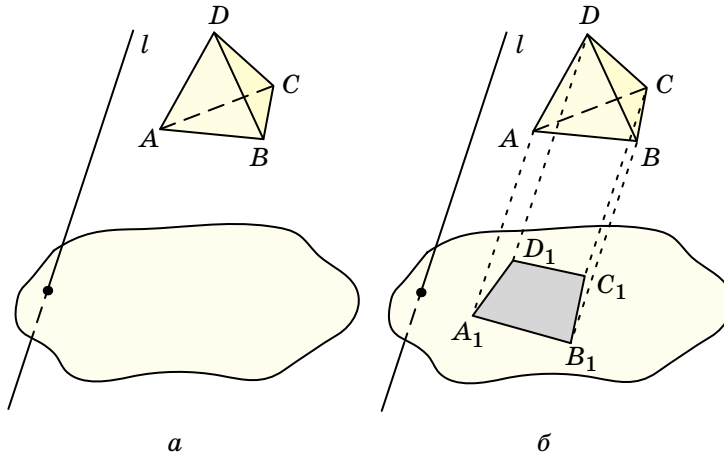


Рис. 3.2

При этом каждой точке X пирамиды $ABCD$ соответствует единственная точка четырёхугольника $A_1B_1C_1D_1$. Этот четырёхугольник является образом данной пирамиды при рассматриваемом отображении – параллельном проектировании (рис. 3.2б).

Рассмотренные два примера отображений существенно отличаются друг от друга. В первом из них образы любых двух различных точек треугольника ABC различны. Для второго отображения характерно то, что существуют различные точки X_1 и X_2 пирамиды $ABCD$, которые имеют один и тот же образ X (рис. 3.2б). Более того, понятно, что у многих образов имеется бесконечное множество прообразов.

Следующее определение выделяет среди всех геометрических отображений важную их часть.

Определение 17. Геометрическое отображение фигуры F на фигуру F_1 называется *взаимно однозначным*, если при этом отображении разные точки фигуры F имеют разные образы.

Если отображение названо, скажем, буквой h , то это можно записать так: если точки M и K различны, то и точки $h(M)$ и $h(K)$ тоже различны.

Или если договориться совпадение точек условно обозначать знаком «=», а несовпадение знаком « $\neq$ », то так: $h(M) = h(K) \Leftrightarrow M = K$.

Пользуясь введённой терминологией, можно сказать, что в примере 1 мы имели дело с взаимно однозначным отображением треугольника ABC на треугольник $A_1B_1C_1$, а в примере 2 отображение пирамиды $ABCD$ на четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ не является взаимно однозначным.

Определение 18. Если h – взаимно однозначное геометрическое отображение фигуры F на фигуру F_1 , то у каждой точки X_1 фигуры F_1 , имеется единственный прообраз – некоторая точка X фигуры F . Если поставить в соответствие каждой точке X_1 фигуры F_1 эту единственную точку X фигуры F , то получится отображение фигуры F_1 на фигуру F , называемое отображением, *обратным* к отображению h .

Отображение, обратное к отображению h , обозначается h^{-1} .

Отображение, имеющее обратное, называется *обратимым*. Из определения следует, что взаимно однозначное отображение является обратимым.

С помощью символики сказанное выше можно записать так: если точки $M \in F$ и $L \in F_1$ таковы, что $h(M) = L$, то $h^{-1}(L) = M$.

Вы уже, наверное, заметили тесную связь понятия *обратного отображения* и изученного в курсе алгебры и начал математического анализа понятия *обратной функции*. Это не случайно. Мы уже говорили, что геометрические отображения – это по сути функции в геометрии. Их «аргументами» и «значениями» являются точки.

Теперь дадим определение *геометрического преобразования* пространства.

Определение 19. Если каждой точке X пространства ставится в соответствие единственная точка X_1 и при этом точка X_1 соответствует какой-либо и притом единственной точке X , то такое соответствие между точками пространства называют его *геометрическим преобразованием*.

Можно сказать по-другому: геометрическое преобразование – это взаимно однозначное отображение всего пространства на себя.

Так как геометрическое преобразование пространства взаимно однозначно, то оно является обратимым, и тем самым, у каждого геометрического преобразования имеется обратное преобразование.

Самым простым примером геометрического преобразования является преобразование пространства, переводящее каждую точку в саму себя. Оно называется *тождественным преобразованием*. Его обозначают буквой E . Согласно определению, для любой точки M пространства имеем: $E(M) = M$.

Геометрическое преобразование пространства является и преобразованием фигур, находящихся в нем. При преобразовании пространства все точки любой фигуры F переходят в их образы, которые и составят фигуру F_1 . Эта фигура F_1 называется *образом фигуры F* при данном преобразовании. Сама фигура F называется *прообразом фигуры F_1* . Говорят также, что фигура F переходит при данном преобразовании в фигуру F_1 и пишут при этом: $F \rightarrow F_1$, или, если геометрическое отображение названо, скажем, буквой h , то пишут: $h(F) = F_1$.

Бывает, что при геометрическом преобразовании образ точки X совпадает с самой точкой X . Можно сказать и так: образ совпадает с прообразом. Или так: при преобразовании точка переходит в себя. В этом случае точка X называется *неподвижной точкой* геометрического преобразования.

Есть очень важное понятие, связанное с геометрическими преобразованиями – *изометрия*. О ней мы уже говорили в учебнике геометрии для 7–9 классов. В § 6.2 этого учебника даётся определение изометрии. Приведём ещё раз это определение.

Определение 20. Геометрическое преобразование пространства, при котором любые две его точки X и Y переходят в такие точки X_1 и Y_1 , что $X_1Y_1 = XY$, называют *изометрией* пространства.

Довольно часто используется другое название изометрии – *движение*. Изометрии имеют очень много различных свойств, к сожалению, мы не сможем их полно изучить из-за недостатка учебного времени.

Рассмотрим пока только один вопрос – связь понятий изометрии и равенства фигур.

Любая изометрия пространства переводит любую фигуру F в такую фигуру F_1 , что расстояния между любыми двумя точками фигуры F_1 равно расстоянию между их прообразами в фигуре F . Говорят, что F_1 получена изометрией фигуры F . Наглядное представление об изометриях фигур в пространстве дают механические движения твёрдых тел в физическом пространстве. Из механических соображений ясно, что изометрии не изменяют ни размеры, ни форму фигур. Поэтому в геометрии фигуры F и G называют равными, если одну из них можно перевести в другую с помощью изометрии пространства.

Мы постоянно будем пользоваться тем, что изометрия переводит фигуру в равную ей фигуру.



ПОВОРОТ ПЛОСКОСТИ ВОКРУГ ТОЧКИ НА ДАННЫЙ УГОЛ И ВРАЩЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ВОКРУГ ОСИ НА ДАННЫЙ УГОЛ

Есть два геометрических преобразования, которые очень важны для курса геометрии и особенно для его приложений – это *поворот плоскости вокруг точки на данный угол* и *вращение пространства вокруг оси на данный угол*.

Поворот плоскости вокруг точки на данный угол изучался в курсе геометрии 7 класса (§ 6.1).

Это преобразование имеет место на плоскости, его нет в пространстве.

Покажем, что мешает нам рассмотреть поворот фигуры в пространстве. Представьте, что вы держите на ниточке воздушный шарик (рис. 3.3).

Подул ветер, и шарик начал поворачиваться в разные стороны. При этом, зная точку, за которую вы держите ниточку, и угол между положениями ниточки в начальный и конечный момент времени, новое положение шарика указать однозначно нельзя. Отсюда вывод: поворот вокруг данной точки на данный угол α можно рассматривать только в конкретной плоскости, а в пространстве этой информации недостаточно.

Перейдем к изучению геометрического преобразования пространства – *вращения на данный угол вокруг данной оси*.

На практике мы видим вокруг себя массу примеров такого вращения.

Прежде всего, Земля, вращаясь вокруг Солнца, сама вращается вокруг своей оси. Пока Земля совершает один оборот вокруг Солнца, она 365 раз успевает повернуться вокруг своей оси. Все мы участвуем сразу в двух движениях: мы за 24 часа поворачиваемся вокруг земной оси и за 365 суток поворачиваемся вокруг Солнца. Солнце, оказывается, тоже имеет ось вращения и вращается вокруг неё.

Наглядный земной пример – движение лопастей ветряной мельницы вокруг оси – вала, к которому они прикреплены (рис. 3.4).

Когда вы открываете дверь в класс – происходит вращение двери (прямоугольного параллелепипеда) вокруг оси – прямой, на которой расположены петли (рис. 3.5).

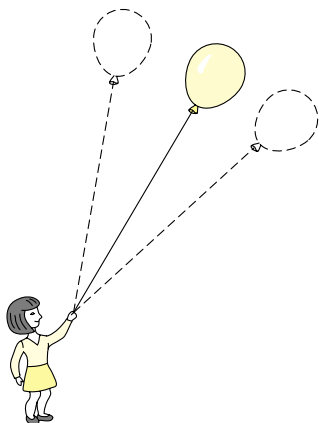


Рис. 3.3

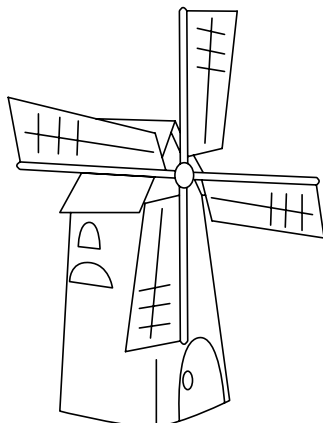


Рис. 3.4

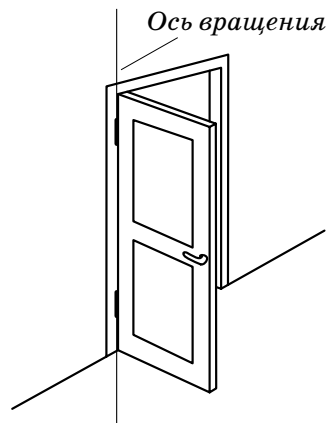


Рис. 3.5

Когда вы достаёте из колодца ведро с водой, вращая ворот, – цилиндр вращается вокруг своей оси (рис. 3.6).

Бесчисленны примеры вращений в технике: вращение пропеллера самолёта, вращение вала турбины, вращение детали станка (рис. 3.7) и т.д.

Теперь попробуем на языке геометрии описать вращение фигуры вокруг данной оси на некоторый угол. В качестве фигуры возьмём для простоты отрезок AB .

Итак:

1. Мы имеем ось вращения l и фигуру — отрезок AB (рис. 3.8а).
2. Нас интересует, в какую точку при вращении вокруг оси l на угол α перейдёт произвольная точка C отрезка AB (рис. 3.8б).

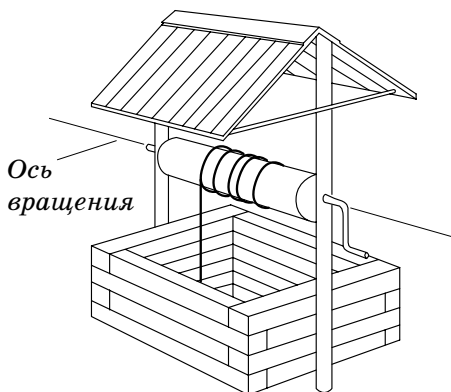


Рис. 3.6

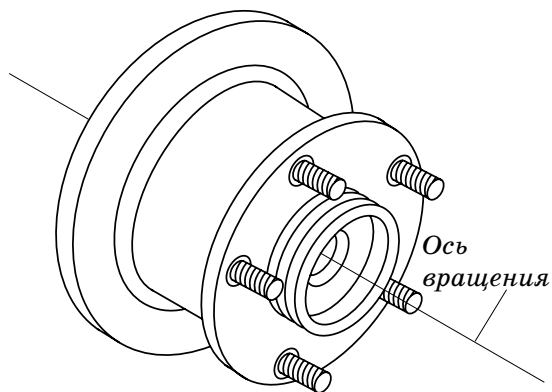


Рис. 3.7

3. Проведём плоскость γ , перпендикулярную оси l и проходящую через точку C (рис. 3.8б).

4. В этой плоскости γ мы можем построить точку C_1 , в которую точка C перейдёт при повороте на угол α (в направлении против часовой стрелки) вокруг точки O — точки пересечения построенной плоскости γ с осью l (рис. 3.8в).

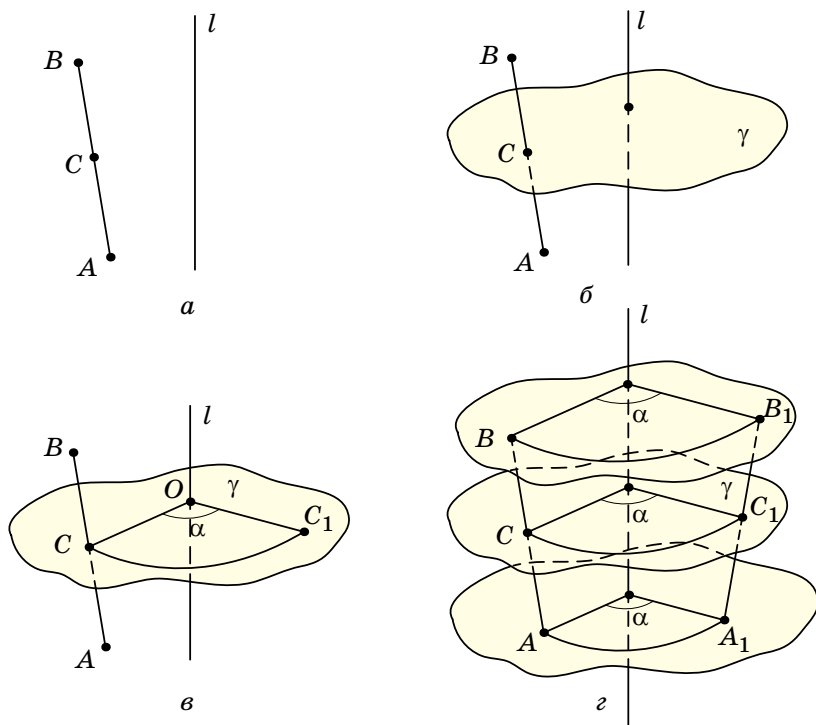


Рис. 3.8

5. Если мы проделаем эту процедуру для каждой точки отрезка AB , то получим фигуру, в которую перейдёт отрезок AB при вращении вокруг оси l на угол α в направлении против часовой стрелки. Пока мы можем только высказать предположение, что этой фигурой будет отрезок A_1B_1 (рис. 3.8г). Доказательство этого факта мы проведём позже.



Обратите внимание на то, что мы будем получать параллельные друг другу плоскости (рис. 3.8г).

Всё сказанное выше позволяет дать точное определение преобразования пространства — *вращение вокруг оси на некоторый угол α* .

Определение 21. Пусть в пространстве заданы прямая p и угол φ . Через любую точку A пространства проведём плоскость $\alpha \perp p$ и пересекающую её в точке O (рис. 3.9). В этой плоскости точка A переходит в точку A_1 посредством поворота вокруг точки O на угол φ . Такое геометрическое преобразование точки A называется *вращением пространства вокруг оси p на угол φ* .

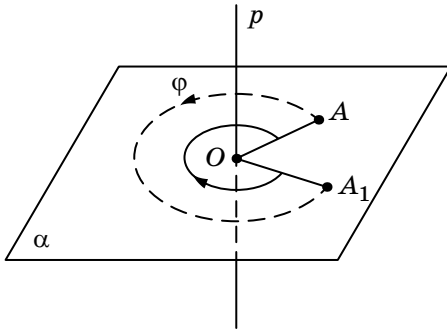


Рис. 3.9

Можно сказать, что при вращении вокруг оси на некоторый угол происходит поворот каждой точки на этот угол в плоскости, перпендикулярной оси вращения, вокруг точки пересечения этой плоскости с осью вращения.

Вращение вокруг оси p на угол φ принято обозначать R_p^φ . На рис. 3.9 $R_p^\varphi(A) = A_1$. Очевидно, что при вращении на угол φ в обратном направлении $A_1 \rightarrow A$.

Теорема 6. Вращение вокруг оси на угол φ есть изометрия.

Доказательство

1. Пусть в пространстве выбрана прямая l – ось вращения на угол φ .
2. Нам даны две произвольные точки пространства A и B , а A_1 и B_1 – их образы при рассматриваемом вращении (рис. 3.10).
3. Требуется доказать, что $A_1B_1 = AB$.
4. Проведём через точки A и B соответственно плоскости α и β , перпендикулярные прямой l (построение). Пусть плоскость α пересекает прямую l в точке O , а плоскость β – в точке Q (рис. 3.10).
5. При вращении пространства вокруг оси l на угол φ произойдёт поворот плоскости α на угол φ вокруг точки O и поворот плоскости β на угол φ вокруг точки Q .
6. При этих поворотах точка A перейдёт в точку A_1 , лежащую в плоскости α , а точка B перейдёт в точку B_1 , лежащую в плоскости β (рис. 3.10).
7. Если плоскости α и β совпадают, то произошёл поворот отрезка AB в этой плоскости на угол φ , в результате которого отрезок AB перешёл в отрезок A_1B_1 . Но поскольку поворот плоскости – изометрия, то $A_1B_1 = AB$, и в этом случае теорема доказана.
8. Рассмотрим случай, когда плоскости α и β различные. Поскольку обе они перпендикулярны одной прямой l , то $\alpha \parallel \beta$.
9. Проведём перпендикуляры AC и A_1C_1 соответственно из точек A и A_1 к плоскости β (построение) (рис. 3.10).

10. Т.к. $QC = OA$, $QC_1 = OA_1$, $\angle CQC_1 = \angle AOA_1 = \varphi$, то точка C_1 является образом точки C при повороте плоскости β на угол φ вокруг точки Q .

11. Это позволяет нам утверждать, что отрезок C_1B_1 является образом отрезка CB при повороте плоскости β на угол φ вокруг точки Q , а следовательно, $C_1B_1 = CB$.

12. Поскольку ещё $C_1A_1 = CA$, прямоугольные треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC равны по двум катетам, а значит, их гипотенузы равны, т.е. $A_1B_1 = AB$.

13 (3). Мы рассмотрели оба возможных случая. Теорема доказана полностью. ■

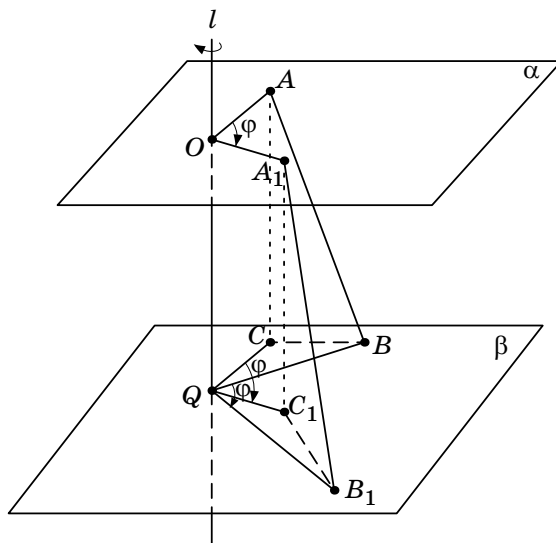


Рис. 3.10

§ 3.3



СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ (ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ)

Подробно мы изучали этот вид симметрии в курсе геометрии 7 класса в § 6.2. «Центральная симметрия. Изометрии». Этот параграф написан сразу для точек и пространства, и плоскости. Там же дано определение симметричных точек в пространстве. Приведём его ещё раз.

Определение 22. Точки A и A_1 называются *симметричными относительно точки O* , если точка O является серединой отрезка AA_1 . При этом точка O считается симметричной себе самой.

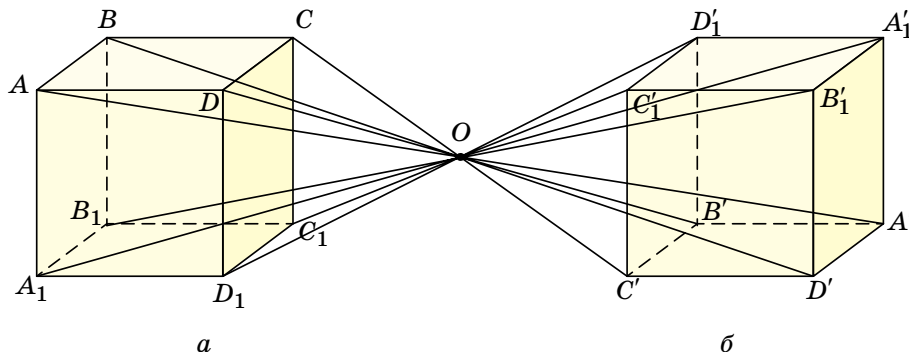


Рис. 3.11.

На рис. 3.11 изображены два куба, симметричные друг другу относительно точки O .

Дадим определение центральной симметрии пространства.

Определение 23. Геометрическое преобразование пространства, при котором всякая точка X переходит в симметричную ей относительно точки O точку X_1 , называется центральной симметрией пространства с центром O .

Центральная симметрия с центром в точке O обозначается Z_O . Запись $Z_O(X)=X_1$ читается так: точка X при центральной симметрии с центром в точке O переходит в точку X_1 .

Теперь докажем теорему о том, что центральная симметрия пространства является изометрией.

Теорема 7. Центральная симметрия является изометрией.

Доказательство

1. Пусть точки A_1 и B_1 получены центральной симметрией относительно точки O точек A, B (рис. 3.12).
2. Треугольники OAB и OA_1B_1 равны по первому признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними).
3. $AB = A_1B_1$ (1, 2, свойство равных треугольников)
4. Таким образом, центральная симметрия сохраняет расстояния между соответствующими точками, и, следовательно, является изометрией. ■

Центральная симметрия пространства имеет свои особенности. Централь-но симметричные пространственные фигуры хотя и равны (ведь они изометричны, т.к. центральная симметрия является изометрией), но при этом они не обязательно могут быть совмещены одна с другой (в смысле механическо-

го движения – пусть и воображаемого – твёрдых тел в физическом пространстве).

Например, на рис. 3.13. точки A и A' , B и B' , C и C' центрально симметричны относительно точки O и $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, но пирамиды $OABC$ и $OA'B'C'$ совместить нельзя. Действительно, совместив двугранный $\angle OC$ и $\angle OC'$, убедимся, что в общем случае грани OCB и $OC'A'$, OCA и $OC'B'$ не совмещаются.

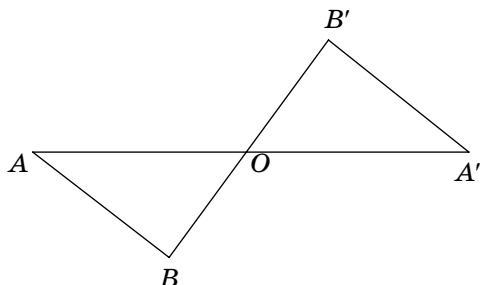


Рис. 3.12.

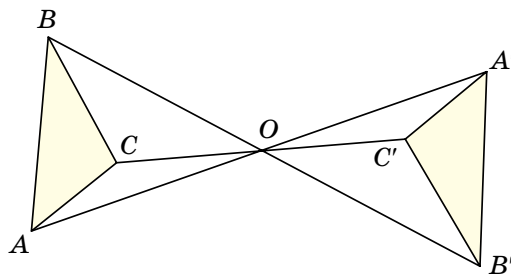
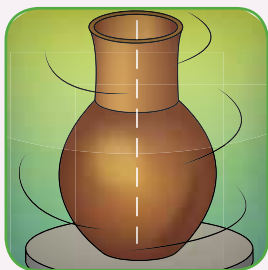


Рис. 3.13

§ 3.4



СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ (ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ)

3.4.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

В курсе геометрии 7 класса в § 8.4 «Осевая симметрия и её применение» мы достаточно подробно рассмотрели осевую симметрию на плоскости. Осевая симметрия в пространстве имеет много дополнительных особенностей.

Начнём с определения точек, симметричных относительно данной прямой.

Пусть в пространстве зафиксирована некоторая прямая a . Мы говорим, что точки X и X_1 симметричны друг другу относительно прямой a , если a – серединный перпендикуляр отрезка XX_1 .

Теперь можно дать определение осевой симметрии пространства.

Определение 24. Геометрическое преобразование пространства, при котором всякая точка некоторой прямой a остается на месте (является неподвижной), а любая точка, не лежащая на ней, переходит в симметричную ей относительно этой прямой точку, называется *симметрией пространства* относительно прямой a , или *осевой симметрией*.

Осевая симметрия обозначается S_a . Запись $S_a(X) = X_1$ читается так: при осевой симметрии с осью a точка X переходит в точку X_1 .

Следует связать осевую симметрию с ещё одним преобразованием пространства – с вращением вокруг данной оси на данный угол.



Осевая симметрия с осью l есть вращение вокруг оси l на угол 180° .

Такой подход к осевой симметрии иногда используют для её определения, определяя симметрию с осью l не так, как мы это делали выше, а сразу говоря, что симметрия с осью l есть вращение вокруг оси l на угол 180° . Таким образом, если при вращении вокруг оси p на угол 180° две пространственные фигуры совмещаются, то они называются *симметричными относительно оси p* , а ось p называется *осью симметрии*. Например, два отрезка AB и A_1B_1 (рис. 3.14), совмещающиеся при вращении на угол $\varphi = 180^\circ$, симметричны относительно оси p .

Рассмотрим ещё одну иллюстрацию. Представим себе модель плоскости с данной фигурой F в виде пластинки, надетой на прямую a как на ось. Повернём пластинку вокруг оси a на 180° так, что она окажется в прежней плоскости (рис. 3.15).

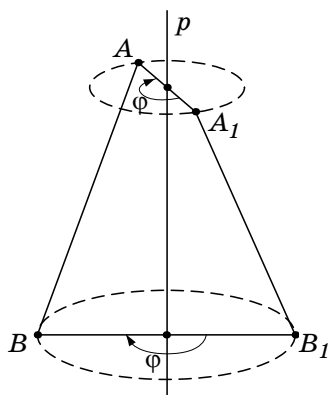


Рис. 3.14

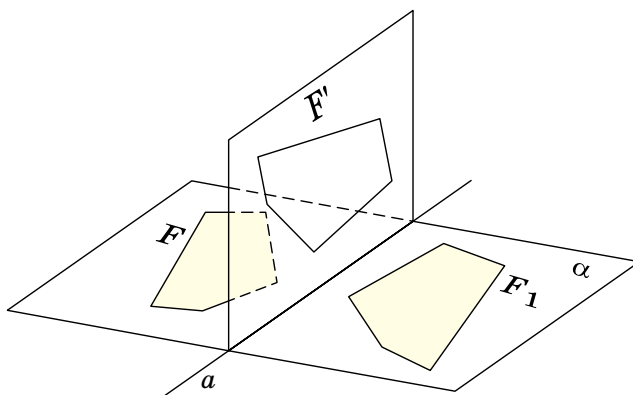


Рис. 3.15

Точки, лежащие по одну сторону от прямой a , переходят на другую сторону на том же расстоянии от a . Это будет симметрия относительно прямой a . Чтобы получить образ фигуры, образованной при симметрии относительно прямой можно перевернуть лист бумаги. Если бумага прозрачна, то рисунок будет виден как отражённый.

Поскольку в предыдущем параграфе было доказано, что вращение вокруг оси является изометрией, то, как следствие, имеет место теорема:

Теорема 8. Осевая симметрия является изометрией.

В параграфе 4.3 мы докажем эту теорему ещё одним способом – с использованием свойств векторов.

3.4.2 ФИГУРЫ, ИМЕЮЩИЕ ОСЬ СИММЕТРИИ

Если для каждой точки данной фигуры построить точку, ей симметричную относительно какой-либо оси, то все построенные таким образом точки образуют новую фигуру, которая называется *фигурой, симметричной данной относительно этой оси*.

Скажем, две прямые являются симметричными относительно оси, если все точки одной прямой симметричны всем точкам другой относительно этой оси. На рис. 3.16 изображены две прямые a и b , симметричные друг другу относительно оси l .

На обычном рисунке наглядно изобразить эту симметрию трудно – это связано со сложностью изображения на плоскости пространственных объектов. Мы уже знаем, что если прямую a вращать вокруг оси l на угол 180° , то прямая a должна совпасть с прямой b . Кроме этого, мы должны понимать (видеть это трудно), что $AA_1 \perp l$, $BB_1 \perp l$, $CC_1 \perp l$, а также $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$.

Если все точки одной плоскости симметричны точкам другой относительно какой-либо оси, то эти плоскости будут симметричными относительно этой оси.

Найдите на модели куба прямые и плоскости, симметричные друг другу относительно некоторой оси.

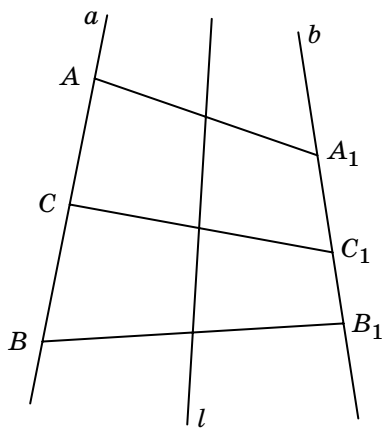


Рис. 3.16



Сколько пар таких прямых и плоскостей можно указать? У всякого ли многогранника есть такие пары симметричных прямых и плоскостей?

Определение 25. Если для данной фигуры имеется такая прямая, что для каждой точки фигуры симметричная ей относительно этой прямой точка тоже принадлежит фигуре, то говорят, что данная фигура имеет ось симметрии – указанную прямую.

На рис. 3.17 изображены куб и тетраэдр и указано две оси симметрии куба и одна ось симметрии тетраэдра*.

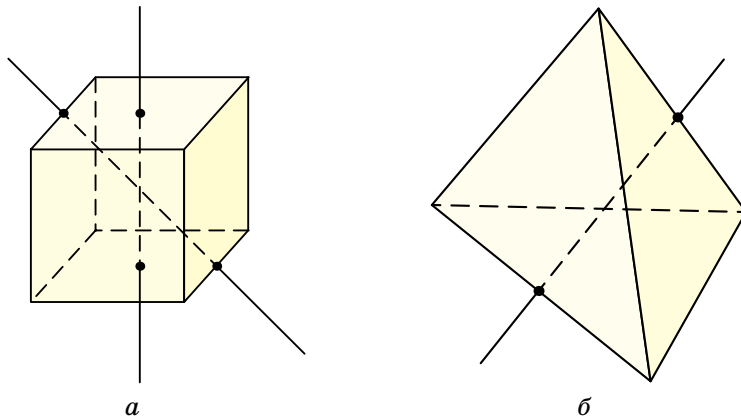


Рис. 3.17



Сколько осей симметрии имеет куб? Сколько осей симметрии имеет тетраэдр?

Подумайте над ответами на эти непростые вопросы.

Существуют и другие фигуры, имеющие несколько осей симметрии. Например, квадрат имеет четыре оси симметрии, лежащие в плоскости этого квадрата (рис. 3.18а). Кроме них имеется и пятая ось, проходящая перпендикулярно плоскости квадрата через его центр.

Прямая имеет бесконечно много осей симметрии. Во-первых, она сама является своей осью симметрии. Во-вторых, осью симметрии этой прямой является любая прямая, ей перпендикулярная (рис. 3.18б).

В курсе геометрии 7–9 классов мы доказали теорему об осях симметрии окружности, лежащих в той же плоскости, что и окружность.

Теорема 9. Окружность симметрична относительно любой прямой, содержащей диаметр окружности.

* Напомним, что тетраэдром мы называем правильный многогранник с четырьмя гранями.

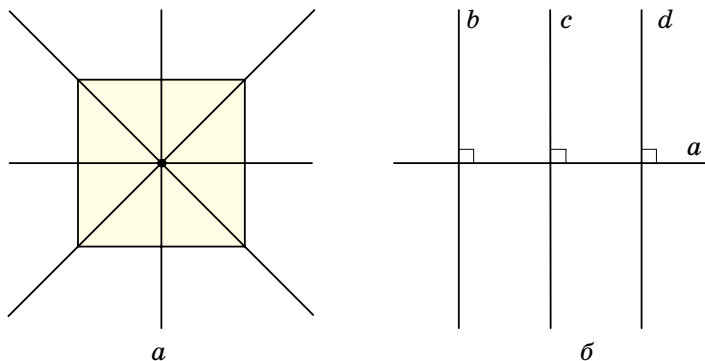


Рис. 3.18

Возникают вопросы:

1) Дана прямая a в плоскости окружности. В каком случае прямая a будет осью симметрии этой окружности?

2) Как можно понимать слова: «Прямая проходит через центр данной окружности»? Какие возможны случаи расположения этой окружности и прямой?

Понятно, что возможны три случая:

а) данная окружность и прямая лежат в одной плоскости (рис. 3.19);

б) прямая проходит через центр окружности и при этом прямая не перпендикулярна плоскости α , в которой лежит окружность (рис. 3.20);

в) прямая проходит через центр окружности и при этом она перпендикулярна плоскости α , в которой лежит окружность (рис. 3.21).

Из определения осевой симметрии ясно, что о симметрии можно говорить только в первом и третьем случаях (обоснуйте этот вывод).

Возникает ещё один вопрос: а как быть со сферой?

? Верно ли, что сфера симметрична относительно любой прямой, проходящей через её центр?

Размышления приведут вас к выводу, что это свойство для сферы справедливо, и вы сможете провести доказательство этого свойства.

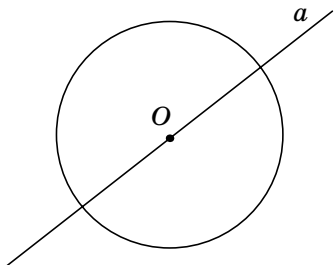


Рис. 3.19

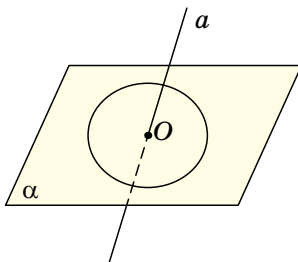


Рис. 3.20

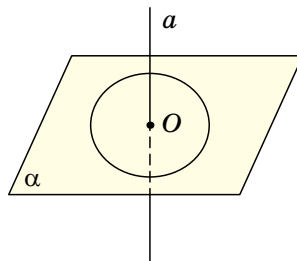


Рис. 3.21



СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТИ (ЗЕРКАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ)

3.5.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗЕРКАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

Познакомимся с ещё одной удивительной симметрией – *зеркальным отражением (зеркальной симметрией)*. В геометрии она называется симметрией относительно плоскости.

На рис. 3.22 мальчик смотрит на себя в зеркало. Что он видит? Какие свойства с точки зрения геометрии можно зафиксировать?

Прежде, чем ответить на эти вопросы, посмотрите на рисунок, на котором изображены два Буратино, симметричные друг другу относительно некоторой плоскости (рис. 3.23). Можно считать эту плоскость зеркалом (хотя Буратино не смотрит в него, а стоит к нему боком).



Рис. 3.22

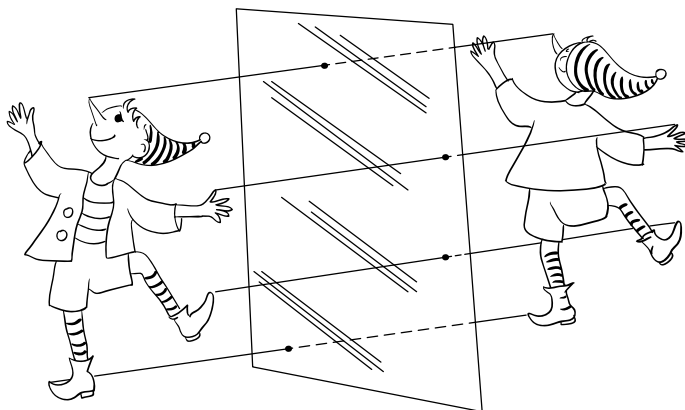


Рис. 3.23

Глядя на оба эти рисунка, мы видим, что:

а) Каждая точка одной фигуры переходит в симметричную ей точку (относительно данной плоскости). Довольно трудно по рисункам понять, как устроены эти симметричные точки. Подскажем, что симметричные относительно плоскости точки лежат на одном перпендикуляре к данной плоскости и на одинаковом от нее расстоянии.

б) Как и во всех предыдущих случаях, размеры фигур при симметрии относительно плоскости сохраняются, а значит – эта симметрия тоже является изометрией.

Перейдём к определению зеркальной симметрии.

Начнём с определения точек, симметричных относительно плоскости.

Определение 26. Точки A и A_1 называются симметричными относительно плоскости α , если прямая AA_1 перпендикулярна плоскости α в точке O и $AO = OA_1$ (рис. 3.24).

Представьте себе, что у нас есть фигура F и плоскость α . Если построить точки, симметричные точкам фигуры F относительно плоскости α , то получим фигуру F_1 симметричную фигуре F относительно плоскости α (рис. 3.25).

Определение 27. Симметрией относительно плоскости называется преобразование пространства, при котором все его точки переходят в точки, симметричные им относительно этой плоскости.

Симметрию относительно плоскости α обозначают S_α ; $S_\alpha(A) = A_1$.

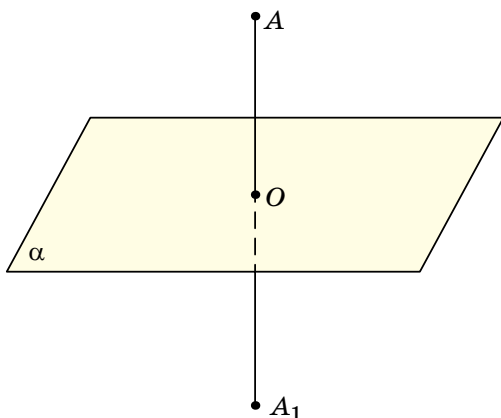


Рис. 3.24

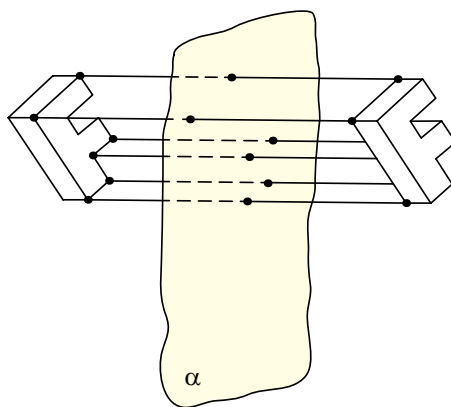


Рис. 3.25

Запись $S_{\alpha}(A) = A_1$ читается так: точки A и A_1 симметричны друг другу относительно плоскости α .

3.5.2 ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИИ ФИГУР

Мы хорошо знаем, что часто встречаются фигуры (объекты в природе), имеющие плоскость симметрии. Многие инструменты (рубанки, молотки, лопаты и др.) имеют плоскости симметрии. Симметричны относительно плоскости трубы, подшипники, автомобили (рис. 3.26).

На рис. 3.27 изображён пример фрукта, имеющего плоскость симметрии – яблоко.

Определение 28. Плоскость называется *плоскостью симметрии фигуры*, если симметрия относительно этой плоскости переводит эту фигуру в себя.

Так, отрезок AB имеет плоскость симметрии – плоскость α , перпендикулярную отрезку в его середине – точке O (рис. 3.28), а также любую плоскость, содержащую его.

Мы много раз говорили о различных сечениях куба. Плоскости сечения могут быть плоскостями симметрии куба. Всего у куба есть девять плоскостей симметрии (рис. 3.29).

Мы можем доказать теорему о том, что симметрия относительно плоскости является изометрией.

Теорема 10. Симметрия относительно плоскости является изометрией.

Доказательство

Что значит, что зеркальное отражение (симметрия относительно плоскости) является изометрией? Ответ следует из определения изометрии: должны сохраняться расстояния между соответствующими точками.

1. Пусть при симметрии относительно плоскости α точки B и C переходят соответственно в точки B_1 и C_1 (рис. 3.30).

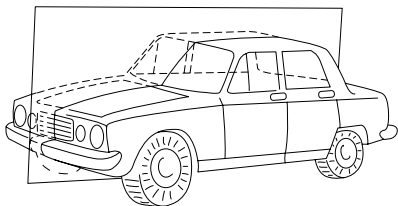


Рис. 3.26

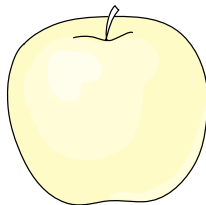


Рис. 3.27

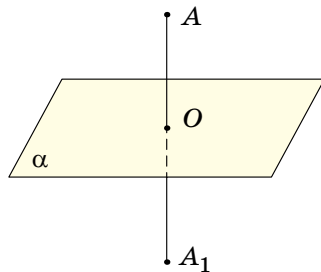


Рис. 3.28

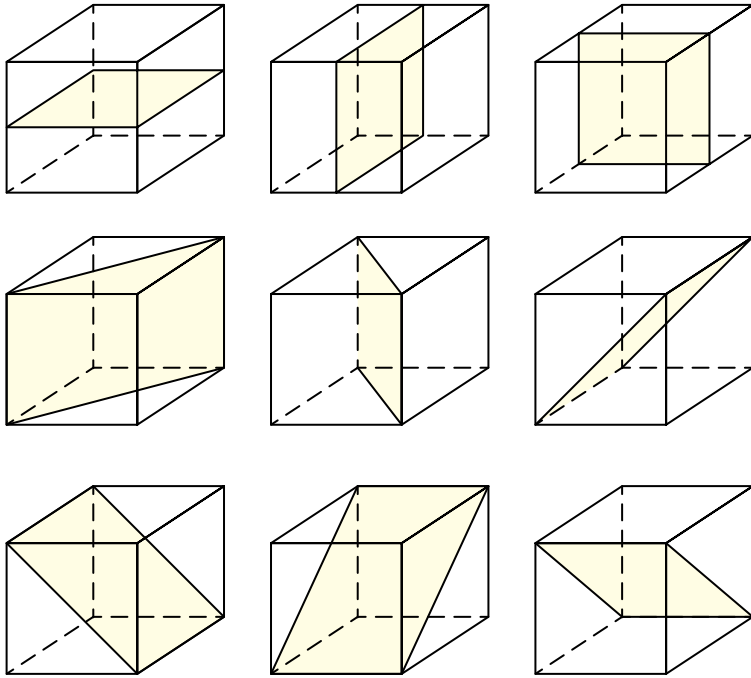


Рис. 3.29

2. Если мы докажем, что $BC = B_1C_1$, то получим требуемое (S_α сохраняет расстояния между соответствующими точками, а значит, является изометрией).

3. В плоскости BCC_1B_1 точки B и B_1 , C и C_1 симметричны относительно прямой MK , значит, $BC = B_1C_1$.

4. Итак, симметрия относительно плоскости сохраняет расстояние между соответствующими точками, а потому симметрия относительно плоскости есть изометрия. ■

Как всякая изометрия, симметрия относительно плоскости переводит прямую в прямую, отрезок – в отрезок, плоскость – в плоскость и вообще всякую фигуру – в равную ей фигуру, т.е. если $F_1 = S_\alpha(F)$, то фигуры F_1 и F равны.

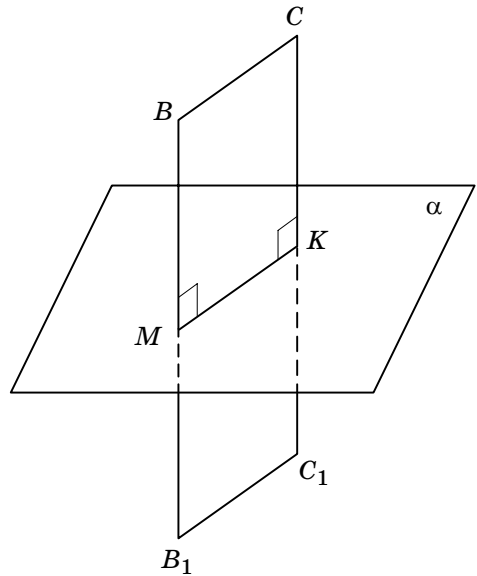


Рис. 3.30



КОМПОЗИЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

3.6.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПОЗИЦИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

При решении геометрических задач часто приходится рассматривать не одно геометрическое преобразование, а последовательное выполнение двух и более преобразований. Всё это вместе в геометрии называется *композицией преобразований*. Изучение композиции преобразований относится к углублённому изучению геометрии в школе.

Дадим определение понятия композиции преобразований.

Определение 29. Для всяких двух преобразований f_1 и f_2 пространства можно построить третье преобразование f_3 следующим образом: если преобразование f_1 переводит точку A в точку A_1 , т.е. $f_1(A) = A_1$, а преобразование f_2 переводит точку A_1 в точку A_2 , т.е. $A_2 = f_2(A_1) = f_2(f_1(A))$, то преобразование, при котором точка A переходит в точку A_2 , называют композицией преобразований f_1 и f_2 .

Композицию преобразований записывают так: $f_3 = f_2 \circ f_1$.

Таким образом, получаем, что если $f_1(A) = A_1$, $f_2(A_1) = A_2$, то $f_3(A) = f_2 \circ f_1(A) = f_2(f_1(A)) = f_2(A_1) = A_2$.

При таком определении композиции $f_2 \circ f_1$ преобразований f_1 и f_2 сначала выполняется преобразование f_1 и к его результату применяется преобразование f_2 .

Композиция преобразований в геометрии является аналогом сложной функции в алгебре и началах анализа.

Приведём пример выполнения композиции двух центральных симметрий Z_O и Z_{O_1} треугольника ABC (рис. 3.31). $\triangle ABC$ перейдет в $\triangle A_1B_1C_1$ при центральной симметрии с центром в точке O , а потом $\triangle A_1B_1C_1$ перейдет в $\triangle A_2B_2C_2$ при центральной симметрии с центром в точке O_1 . Таким образом,

$\triangle ABC$ перейдет в $\triangle A_2B_2C_2$ при выполнении композиции двух центральных симметрий: $Z_{O_1} \circ Z_O$.

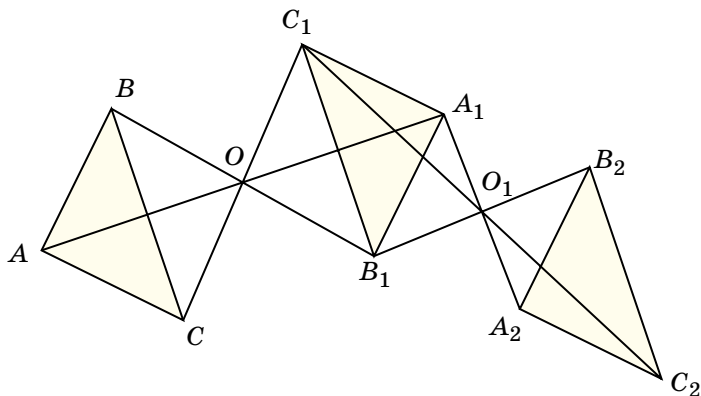


Рис. 3.31

Докажем некоторые свойства композиций произвольных геометрических преобразований.

Теорема 11. Композиция геометрических преобразований обладает свойством ассоциативности (сочетательности).

Доказательство

1. Даны три геометрические преобразования пространства f_1, f_2, f_3 такие, что $f_1(A) = A_1, f_2(A_1) = A_2, f_3(A_2) = P$.

2. Требуется доказать, что $(f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$.

3. Для этого достаточно убедиться, что в результате действия композиции преобразований $(f_3 \circ f_2) \circ f_1$ на любую точку A и при действии на эту точку композиции преобразований $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ получается одна и та же точка; иначе говоря, образы любой точки A пространства при преобразованиях $(f_3 \circ f_2) \circ f_1$ и $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ совпадают, т.е. $(f_3 \circ f_2) \circ f_1(A) = f_3 \circ (f_2 \circ f_1)(A)$.

4. Имеем,

$$((f_3 \circ f_2) \circ f_1)(A) = (f_3 \circ f_2) \circ (f_1(A)) = (f_3 \circ f_2)(A_1) = f_3(f_2(A_1)) = f_3(A_2) = P;$$

$$(f_3 \circ (f_2 \circ f_1))(A) = f_3((f_2 \circ f_1)(A)) = f_3(f_2(f_1(A))) = f_3(f_2(A_1)) = f_3(A_2) = P$$

5. Итак, $(f_3 \circ f_2) \circ f_1(A) = f_3 \circ (f_2 \circ f_1)(A) = P$, следовательно, $(f_3 \circ f_2) \circ f_1$ и $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ равны, $(f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ ■

Теорема 12. Композиция двух геометрических преобразований не обязательно обладает свойством коммутативности (переместительности), т.е. не для всяких геометрических преобразований f_1 и f_2 выполняется равенство $f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$.

Рассмотрим, например, на прямой последовательные семь точек: A, B, C, D, E, F, G , таких, что расстояние между каждой парой соседних точек одинаковы (рис. 3.32). Пусть f_1 и f_2 – центральные симметрии с центрами D

и E соответственно. Тогда $f_1(C) = E$, $f_2(E) = E$, а значит $f_2 \circ f_1(C) = E$. В то же время $f_2(C) = G$, $f_1(G) = A$, а значит, $f_1 \circ f_2(C) = A$.

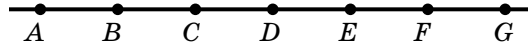


Рис. 3.32

Таким образом, композиции $f_1 \circ f_2$ и $f_2 \circ f_1$ не равны между собой.

Теорема 13. Композицией любого геометрического преобразования f и тождественного преобразования E является данное преобразование f .

Доказательство

1. f – произвольное геометрическое преобразование пространства и E – тождественное преобразование. A – произвольная точка, такая что $f(A) = A_1$ (дано).

2. Требуется доказать, что $E \circ f = f \circ E = f$.

3. Рассмотрим композиции преобразований $E \circ f$ и $f \circ E = f$.

$$(E \circ f)(A) = E(f(A)) = E(A_1) = A_1,$$

$$(f \circ E)(A) = f(E(A)) = f(A) = A_1.$$

4(2). Итак, $(E \circ f)(A) = (f \circ E)(A)$, значит, $E \circ f = f \circ E = f$. ■

Теорема 14. Композиция любого геометрического преобразования f и обратного ему преобразования f^{-1} есть тождественное преобразование E .

Доказательство

1. Дано геометрическое преобразование f , при котором $f(A) = A_1$ и обратное преобразование f^{-1} , при котором $f^{-1}(A_1) = A$.

2. Требуется доказать, что композиция преобразований $f^{-1} \circ f = E$.

3. Найдем композицию $f^{-1} \circ f$. Для любой точки A справедливо соотношение $f(A) = A_1$ и $f^{-1}(A_1) = A$.

4. Тогда $(f^{-1} \circ f)(A) = f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(A_1) = A$.

5. Получаем, что композиция преобразования f и ему обратного преобразования f^{-1} любую точку пространства переводит в себя.

6. Но тождественное преобразование E также любую точку пространства переводит в себя $E(A) = A$.

7(2). Получаем, что $f^{-1} \circ f = E$. ■

Рассмотрим теперь композиции изометрий. Вначале рассмотрим некоторые свойства изометрий.

Теорема 15. Изометрия является обратимым геометрическим преобразованием.

Доказательство

1. Пусть f – данная изометрия.

2. Требуется доказать, что геометрическое преобразование f обратимо.

3. Докажем это свойство методом доказательства от противного. Предположим, что преобразование f необратимо.

4. Тогда найдутся две различные точки A и B , которые переходят при изометрии f в одну точку, т.е. точки $A_1 = f_1(A)$ и $B_1 = f_1(B)$ совпадают.

5. По определению изометрии $A_1B_1 = AB$.

6. Но $A_1B_1 = 0$, т.к. точки A_1 и B_1 совпадают, а $AB \neq 0$, т.к. точки A и B различны.

7. Мы получили противоречие с п. 1.

8(2). Изометрия f обратима. ■

Теорема 16. Композиция изометрий является изометрией.

Доказательство

1. Пусть даны изометрии f_1 и f_2 .

2. Требуется доказать, что композиция $f_2 \circ f_1$ – изометрия.

3. Возьмём две произвольные точки A и B . Пусть $A_1 = f_1(A)$, $B_1 = f_1(B)$.

Так как f_1 – изометрия, то $A_1B_1 = AB$.

4. Пусть $A_2 = f_2(A_1)$, $B_2 = f_2(B_1)$. Т.к. f_2 – изометрия, то $A_2B_2 = A_1B_1$.

5. Из п. 3 и п. 4 следует, что $A_2B_2 = AB$.

6(2). Поскольку $A_2 = f_2(A_1) = f_2(f_1(A)) = f_2 \circ f_1(A)$, $B_2 = f_2(B_1) = f_2(f_1(B)) = f_2 \circ f_1(B)$, т.е. композиция $f_2 \circ f_1$ переводит точки A и B соответственно в точки A_2 и B_2 и по п. 5 $A_2B_2 = AB$, то композиция $f_2 \circ f_1$ – изометрия. ■

3.6.2

ПРИМЕРЫ КОМПОЗИЦИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Рассмотрим простые примеры, связанные с выполнением одинаковых геометрических преобразований.

Пример 1. Убедимся, что композиция двух центральных симметрий с одним и тем же центром является тождественным преобразованием, т.е. $Z_0 \circ Z_0 = E$. Это следует из того, что если точка A симметрична точке B относительно центра O , то и точка B симметрична точке A относительно того же центра O . Значит, преобразование Z_0 переведёт точку A в точку B , а повторное применение преобразования Z_0 переведёт точку B назад в точку A . Этот результат можно сформулировать и по-другому:



Геометрическим преобразованием, обратным к центральной симметрии с центром O , является она сама.

Записать это можно так: $Z_0^{-1} = Z_0$.

Пример 2. Для осевой симметрии с осью l верны аналогичные утверждения. Это следует из того, что если точка A симметрична точке B относительно прямой l , то и точка B симметрична точке A относительно той же прямой l .

Используя обозначение S_l для осевой симметрии с осью l , можно записать:

$$S_l^{-1} = S_l,$$

$$S_l \circ S_l^{-1} = S_l^{-1} \circ S_l = E.$$

Пример 3. Докажите самостоятельно, что если S_α – симметрия относительно плоскости α , то:

$$S_\alpha^{-1} = S_\alpha;$$

$$S_\alpha \circ S_\alpha^{-1} = S_\alpha^{-1} \circ S_\alpha = E.$$

! Симметрия относительно плоскости есть преобразование пространства, совпадающее со своим обратным преобразованием.

! Композиция двух симметрий относительно одной и той же плоскости есть тождественное преобразование.

РАЗВИВАЕМ УМЕНИЯ

ЗАДАЧИ К § 3.1

Геометрические отображения на плоскости

Н

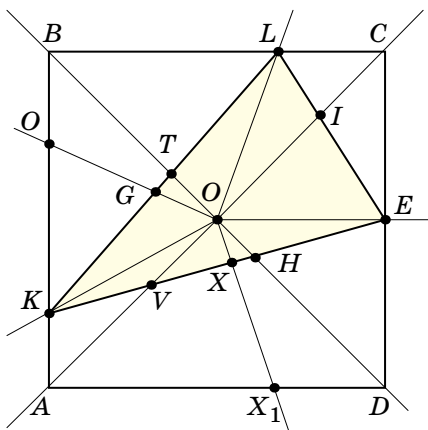


Рис. 3.33

1 На рис. 3.33 изображены квадрат $ABCD$ и треугольник KLE , вершины которого лежат на сторонах квадрата. Точка O – центр пересечения диагоналей квадрата, расположена во внутренней области треугольника KLE . Задано соответствие между точками треугольника и точками квадрата по правилу: каждой точке X , лежащей на стороне треугольника, поставлена в соответствие точка X_1 на стороне квадрата $ABCD$, лежащая на луче OX . Ответьте на следующие вопросы: а) Является ли это соответствие геометрическим отображением? б) Назовите обра-

зы точек V, H, G, T при заданном отображении. в) В какие точки переходят точки K, L, E при отображении и как они называются? г) Образами каких точек являются точки B, C ? д) В какую фигуру переходит отрезок KL ? Отрезок KE ? е) Является ли рассматриваемое отображение взаимно однозначным?

- 2** На рис. 3.34 задано соответствие между точками ломаной $AXLBCMD$ и точками отрезка A_1D_1 : каждой точке X ломаной сопоставляется та точка отрезка, которая лежит на луче OX . Ответьте на следующие вопросы: а) Является ли это соответствие геометрическим отображением? б) Какая точка является образом точки A ? точки X ? точки L ? в) Какая точка ломаной переходит в точку M_1 ? в точку L_1 ? в точку D_1 ? г) Образом какой точки является точка A_1 ? точка X_1 ? точка C_1 ? д) Является ли данное соответствие обратимым геометрическим отображением?

- 3** На рис. 3.35 задано соответствие между точками квадрата $ABCD$ и точками отрезка A_1D_1 : каждой точке X квадрата соответствует основание перпендикуляра, проведенного через точку X к прямой A_1D_1 . а) Является ли это соответствие геометрическим отображением? б) В какую точку отрезка переходит точка C ? точка D ? точка A ? в) Образом какой точки является точка H_1 ? точка P_1 ? г) Обратимо ли это отображение?

- 4** Дан угол MON . Каждой точке, взятой на стороне OM , соответствует та точка стороны ON , которая лежит на окружности с центром O , проходящей через взятую точку; вершина угла переходит в себя (рис. 3.36).

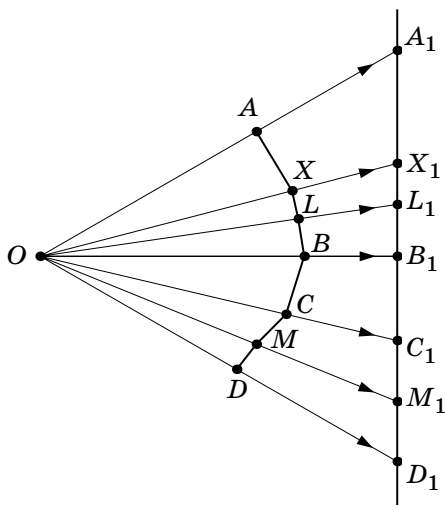


Рис. 3.34

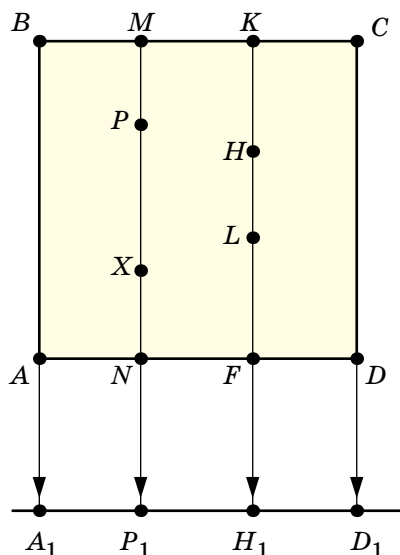


Рис. 3.35

а) Отображение какой фигуры на какую здесь задано? б) Какой образ отрезка OY при этом отображении? в) Образом какого отрезка является отрезок OL ? г) Сохраняются ли при этом отображении расстояния между соответствующими точками? д) Покажите, что это отображение обратимо. е) Укажите образы нескольких точек и фигур при отображении, обратном данному.

5 Даны два отрезка AB и CD и точка O , из которой исходят лучи, соединяющие концы данных отрезков (рис. 3.37). Задано соответствие между точками отрезков AB и CD , при котором точке X отрезка AB ставится в соответствие точка X_1 отрезка CD , лежащая на пересечении луча OX с отрезком CD . Является ли заданное соответствие между точками отрезков AB и CD геометрическим отображением? Если да, то обратимо ли оно?

6 Пусть L_1 и L_2 – две концентрические окружности с общим центром O . На рис. 3.38 задано соответствие между точками окружностей L_1 и L_2 , при котором точке X окружности L_1 ставится в соответствие точка X_1 окружности L_2 , лежащая на пересечении луча OX с окружностью L_2 . Является ли заданное соответствие между точками окружностей L_1 и L_2 геометрическим отображением? Если да, то обратимо ли оно?

7 Пусть задано соответствие между точками диаметра AB окружности L с центром в точке O (рис. 3.39) и точками этой окружности, по которому каждой точке X диаметра окружности поставлена в соответствие любая точка окружности X_1 , лежащая на пересечении перпендикуляра, проведенного через точ-

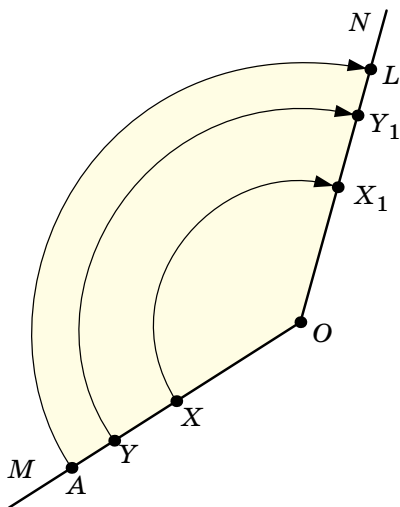


Рис. 3.36

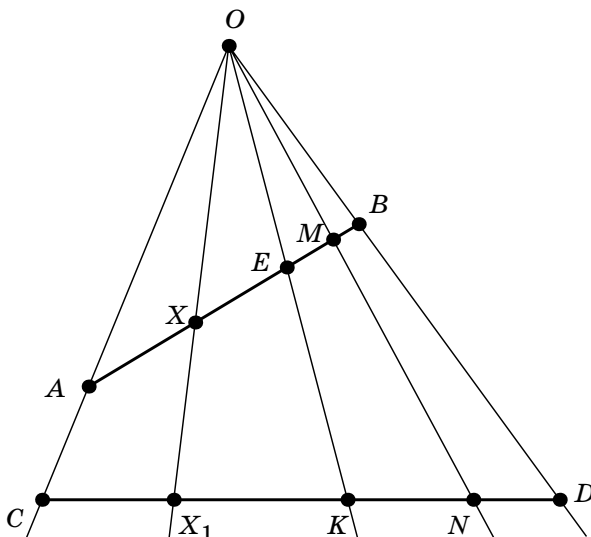


Рис. 3.37

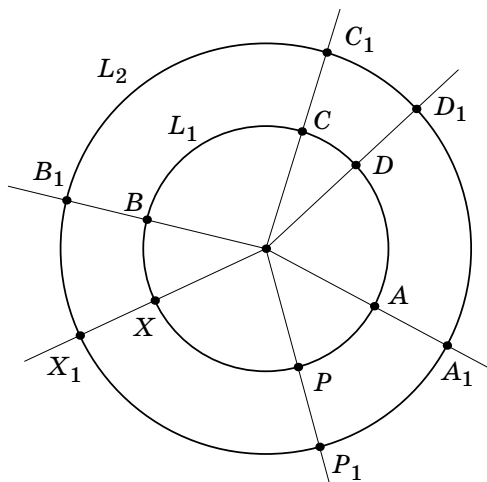


Рис. 3.38

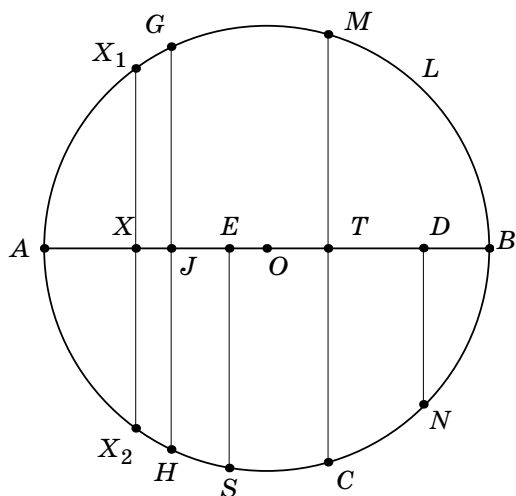


Рис. 3.39

ку X к диаметру AB и окружности L . Является ли заданное соответствие между точками диаметра AB и точками окружности L геометрическим отображением? Если да, то обратимо ли оно?

- 8** На рис. 3.40 задано соответствие между точками хорды AB окружности L и точками окружности L с центром в точке O , при котором точке X хорды AB поставлена в соответствие любая точка X_1 окружности L , лежащая на пересечении луча CX с окружностью L , где точка C – точка пересечения касательных, проведенных через точки A и B . Будет ли данное соответствие геометрическим отображением? Если да, то обратимо ли оно?

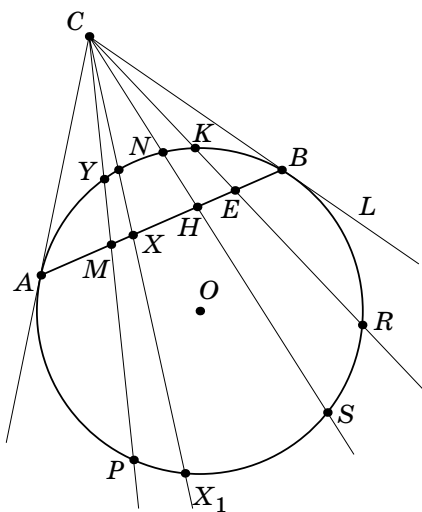


Рис. 3.40

Н

Геометрические отображения в пространстве

- 9** Пусть L и L_1 – две концентрические сферы с общим центром – точкой O (рис. 3.41). Между точками данных сфер задано соответствие, при котором

точке X сферы L ставится в соответствие точка X_1 сферы L_1 , которая лежит на луче OX . Является ли заданное соответствие между точками сферы L и сферы L_1 геометрическим отображением? Если да, то обратимо ли оно?

- 10** Пусть дана сфера L с центром в точке O , в которой проведено диаметрально сечение (рис. 3.42). Установим соответствие между точками диаметрального сечения и точками сферы L , при котором каждой точке X диаметрального сечения поставлена в соответствие любая точка X_1 сферы L , лежащая на пересечении перпендикуляра, проведённого через точку X к сечению и сферой. Является ли заданное соответствие геометрическим отображением? Если да, то обратимо ли оно?

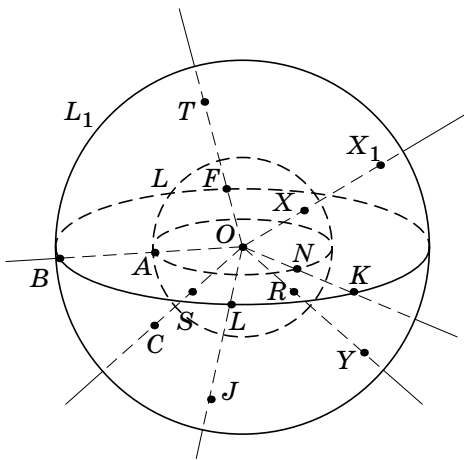


Рис. 3.41

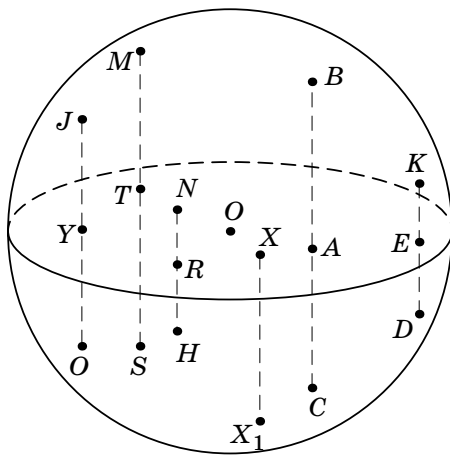


Рис. 3.42

- 11** Две сферы касаются а) внутренним образом; б) внешним образом. Покажите, выполнив рисунок, как можно перевести одну из сфер в другую с использованием геометрического отображения.

12 На рис. 3.43 изображён параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в котором проведено сечение $A_2 B_2 C_2 D_2$, параллельное основаниям параллелепипеда. Задано соответствие между точками сечения и точками основания параллелепипеда, при котором каждой точке сечения ставится в соответствие любая точка пересечения основания с прямой, проведённой через точку сечения параллельно боковому ребру AA_1 . Является ли оно отображением? А если задать соответствие между точками оснований параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и точками сечения $A_2 B_2 C_2 D_2$ по аналогичному правилу? Будет ли это соответствие геометрическим отображением?

- 13** Пусть в сферу вписан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Задано отображение, при которой точке X куба ставится в соответствие точка X_1 сферы, лежащая на

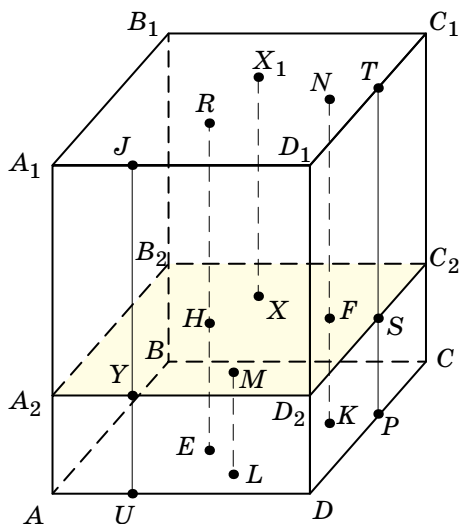


Рис. 3.43

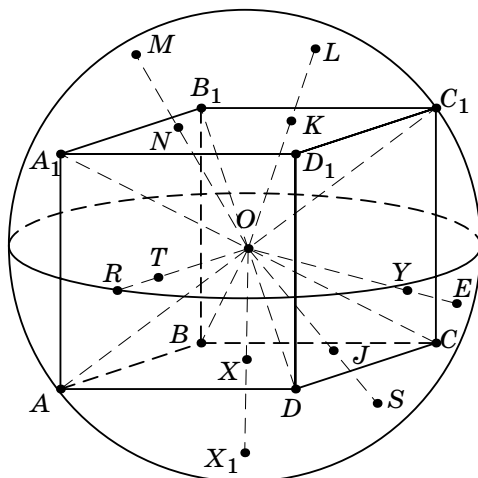


Рис. 3.44

продолжении луча OX (рис. 3.44). а) Отображение какого геометрического тела на какое задано? б) Какие точки являются образами точек K, N, T, J ? в) Какие точки переходят в себя при этом отображении? г) Обратно ли данное отображение?

- 14** Пусть дана призма $AEBA_1E_1B_1$. Задано отображение, при котором произвольной точке X призмы $AEBA_1E_1B_1$ ставится в соответствие точка X_1 грани AA_1B_1B , являющаяся основанием перпендикуляра, проведённого из точки X к грани AA_1B_1B (рис. 3.45). а) Отображение какого геометри-

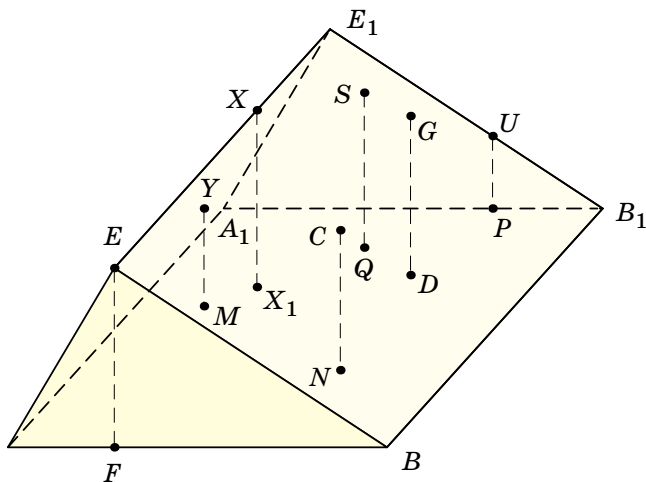


Рис. 3.45

ческого тела на какое задано? б) Какие точки являются образами точек Y, S, G, C ? в) Назовите образы точек A, A_1, B, B_1 ? Как называются такие точки при отображении? г) В какие точки преобразуются точки U, E ? д) В какую фигуру переходит отрезок EB ? ломаная $A_1E_1B_1$? е) Обратимо ли данное отображение?

- 15** Пусть O – произвольная точка некоторой прямой p . Поставим в соответствие каждой точке X прямой p такую точку X_1 , что точка O является серединой отрезка XX_1 (точка O преобразуется сама в себя). а) Какая фигура является образом прямой p при этом отображении? б) Обратимо ли это отображение?
- 16** Пусть даны два не равных отрезка AB и A_1B_1 , лежащие соответственно в параллельных плоскостях α и β (рис. 3.48). Пусть O – точка пересечения прямых AA_1 и BB_1 . Установим соответствие между точками отрезков AB и A_1B_1 , при котором точке X , отрезка AB ставится в соответствие точка X_1 отрезка A_1B_1 , лежащая на продолжении луча OX . Является ли заданное соответствие между точками отрезков AB и A_1B_1 геометрическим отображением? Если да, то является ли оно взаимно однозначным?
- 17** Задано соответствие между точками полусферы и точками диаметрального сечения по правилу: точке X полусферы поставлена в соответствие

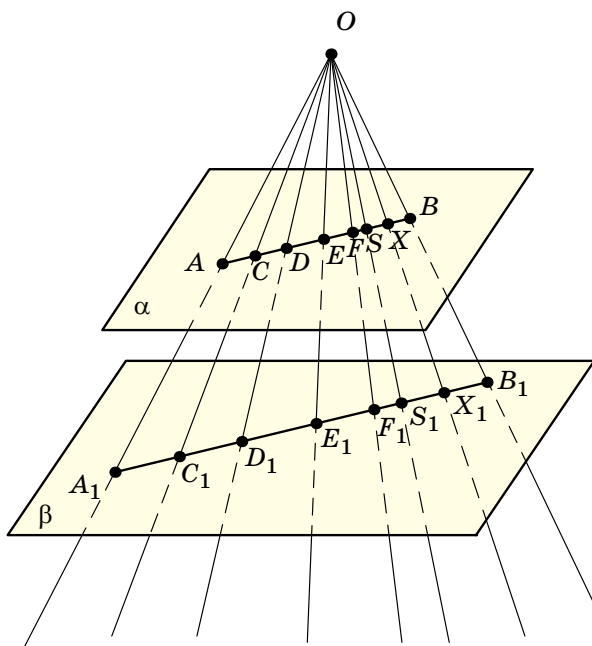


Рис. 3.48

точка X_1 сечения сферы, являющаяся основанием перпендикуляра, опущенного из точки X к основанию (рис. 3.47). Является ли это соответствие между точками фигур отображением? Если да, то является ли оно взаимно однозначным?

- 18** На рис. 3.48 задано соответствие между точками сечения цилиндра, параллельного основаниям цилиндра и точками оснований цилиндра по правилу: точке X сечения поставлена в соответствие любая точка X_1 ; основания цилиндра, лежащая на перпендикуляре, проведённом через точку X к сечению (рис. 3.48). Является ли соответствие между точками фигур геометрическим отображением? Если да, то обратимо ли оно?

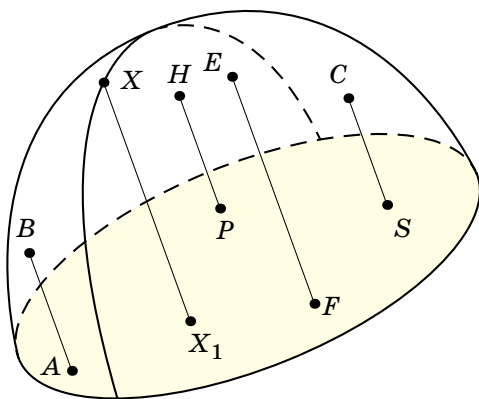


Рис. 3.47

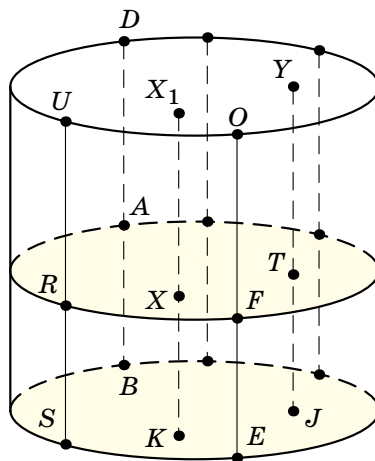


Рис. 3.48

- 19** Задано соответствие между точками сечения конуса, параллельного основанию конуса и точками самого основания конуса, по правилу: точке X сечения конуса поставлена в соответствие точка X_1 основания конуса, лежащая на продолжении луча O_2X (рис. 3.49). Является ли соответствие между точками фигур геометрическим отображением? Если да, то обратимо ли оно?
- 20** На рис. 3.50 задано соответствие между точками двух параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – оснований прямого параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$, по правилу: точке X параллелограмма $ABCD$ поставлена в соответствие точка X_1 параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, такая, что $A_1X = AX_1$ и $C_1X = CX_1$ (рис. 3.50). Являются ли такое соответствие геометрическим отображением? (Вывод обоснуйте.)

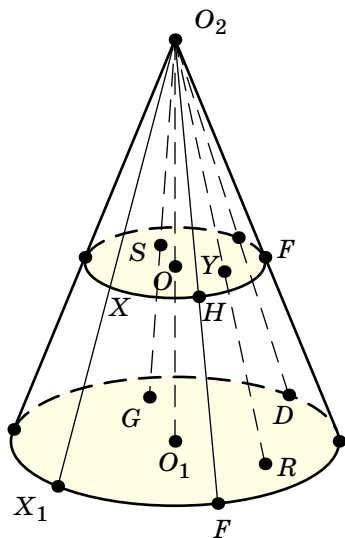


Рис. 3.49

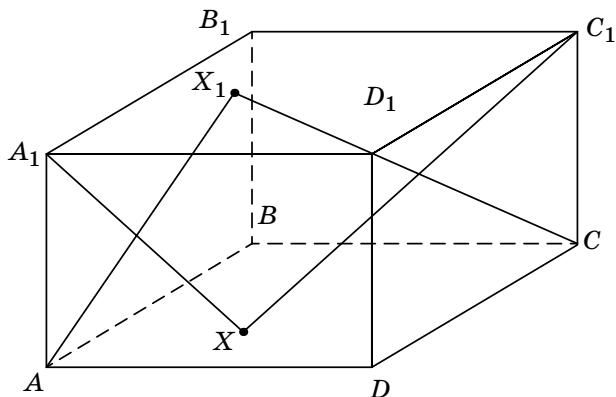


Рис. 3.50

ЗАДАЧИ К §§ 3.2–3.5

Н

- 21** Постройте образы вершин правильной пирамиды $ABCD$ при центральной симметрии с центром A .
- 22** Существуют ли точки, прямые и плоскости, которые при центральной симметрии Z_0 переходят в себя?
- 23** Докажите, что центральная симметрия переводит: 1) прямую в параллельную ей прямую; 2) плоскость в параллельную ей плоскость.
- 24** Точка O называется *центром симметрии фигуры*, если при симметрии Z_0 эта фигура переходит в себя.
Сколько центров симметрии имеют следующие фигуры: а) отрезок; б) прямая; в) плоскость; г) объединение двух параллельных плоскостей; д) объединение двух пересекающихся плоскостей; е) объединение пересекающихся прямой и плоскости; ж) объединение параллельных прямой и плоскости?

- 25** Через центр симметрии M двух различных параллельных прямых p и q проведены две прямые m и n . Пересеките данные четыре прямые прямой в точках A, B, C, D так, чтобы $AB = BC = CD$. Прямые m и n не параллельны p и q .

Осевая симметрия



- 26** Может ли наклонная четырёхугольная призма иметь: а) центр симметрии; б) ось симметрии?
- 27** Имеет ли ось симметрии прямой параллелепипед?
- 28** Может ли прямой параллелепипед иметь три оси симметрии?
- 29** Сколько осей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед?
- 30** Докажите, что равносторонний шестиугольник, описанный около данной окружности, имеет в плоскости, в которой расположен, три оси симметрии.
- 31** Докажите, что равноугольный шестиугольник, вписанный в данную окружность, имеет в плоскости, в которой расположен, три оси симметрии.
- 32** а) Какие точки при осевой симметрии переходят в себя? б) Какие прямые при осевой симметрии переходят в себя?
- 33** Каково взаимное расположение оси симметрии l и образа α_1 данной плоскости α , если: 1) $l \subset \alpha$; 2) $l \perp \alpha$; 3) l – наклонная к α ?
- 34** Каким может быть при осевой симметрии взаимное расположение: а) прямой и её образа; б) плоскости и её образа?
- 35** Даны две различные точки A и B . Укажите оси симметрии, переводящие A в B . Какой фигурой является объединение всех таких осей?
- 36** Если при симметрии относительно прямой фигура переходит в себя, то эту прямую называют осью симметрии фигуры. Укажите оси симметрии следующие фигур: а) отрезка; б) луча; в) прямой; г) плоскости; д) параллелограмма; е) правильного треугольника; ж) квадрата; з) окружности, и) объединения двух пересекающихся прямых.

П

- 37** Докажите, что если плоская фигура имеет центр симметрии, то она имеет и ось симметрии.
- 38** Докажите, что если противоположные плоские углы выпуклого четырёхгранного угла попарно равны, то этот четырёхгранный угол обладает осевой симметрией.

Зеркальная симметрия

Н



- 39** Когда наклонная треугольная (четырёхугольная) призма имеет плоскость симметрии?
- 40** Может ли наклонная призма иметь две плоскости симметрии?
- 41** Призма имеет две плоскости симметрии. Является ли это свойство достаточным признаком прямой призмы?
- 42** Когда прямой, но не прямоугольный параллелепипед имеет три плоскости симметрии?

Н

- 43** Сколько плоскостей симметрии существует в прямоугольном параллелепипеде?
- 44** Постройте правильную пирамиду, которая имеет: а) две плоскости симметрии; б) одну ось симметрии; в) три оси симметрии.

П

- 45** Даны три пересекающиеся в одной точке плоскости. Найдите множество всех точек пространства, каждая из которых равноудалена от данных трёх плоскостей.
- 46** а) Найдите множество всех точек, каждая из которых при симметрии относительно плоскости α переходит в себя. б) Какие прямые при симметрии относительно плоскости переходят в себя?

- 47** Каким может быть при симметрии относительно плоскости взаимное расположение: а) прямой и её образа; б) плоскости и её образа?
- 48** Если при симметрии относительно плоскости фигура переходит в себя, то эту плоскость называют плоскостью симметрии данной фигуры. Укажите плоскости симметрии следующих фигур: а) отрезка; б) прямой; в) луча.
- 49** Имеются ли в природе, в технике предметы, которые можно считать моделями пространственных фигур, имеющих плоскость симметрии? Приведите примеры.
- 50** Докажите, что если фигура имеет единственный центр симметрии и плоскость симметрии, то центр симметрии принадлежит плоскости симметрии.
- 51** Существует ли правильная пирамида, имеющая только одну плоскость симметрии?

РАЗЛИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

П

- 52** Докажите, что поворот R_N^φ плоскости однозначно определяется заданием направленного угла φ поворота и парой соответственных точек A_1 и A_2 .
- 53** Около окружности описан восьмиугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны. Докажите, что противоположные стороны восьмиугольника попарно параллельны и равны.
- 54** На сторонах AB и BC треугольника ABC построены квадраты с центрами D и E , причём точки C и D расположены по одну сторону от прямой AB , а точки A и E – по разные стороны от прямой BC . Докажите, что угол между прямыми AB и DE равен 45° .
- 55** Три равные окружности имеют общую точку. Докажите, что окружность, проведённая через вторые точки пересечения данных трёх окружностей, равна данным.
- 56** На плоскости даны четыре равные окружности, проходящие через одну точку и пересекающиеся вторично в шести точках. Докажите, что четыре окружности, проходящие через каждые три из этих шести точек, взятых по одной на каждой из данных окружностей, пересекаются в одной точке.

П

- 57** Докажите, что композиция двух осевых симметрий пространства с пересекающимися осями есть вращение вокруг оси, проходящей через точку пересечения осей симметрии перпендикулярно плоскости, в которой они лежат.
- 58** Докажите, что композиция двух вращений, оси которых пересекаются, есть вращение вокруг оси, проходящей через точку пересечения данных осей.
- 59** Даны осевые симметрии S_p и S_q пространства. Докажите, что если $p \neq q$ и $S_q \circ S_p = S_p \circ S_q$, то прямые p и q пересекаются под прямым углом.
- 60** Докажите, что фигура, представляющая собой объединение двух скрещивающихся прямых, имеет три оси симметрии.
- 61** Докажите, что композиция трёх плоскостных симметрий есть плоскостная симметрия тогда и только тогда, когда плоскости симметрии проходят через одну прямую или же когда они попарно параллельны.
- 62** Известно, что композиция трёх осевых симметрий пространства, оси которых проходят через одну точку, есть снова осевая симметрия. Как расположены эти оси?
- 63** Какую изометрию представляет собой композиция трёх осевых симметрий пространства, оси которых параллельны?
- 64** Докажите, что композиция осевой симметрии и вращения вокруг оси при условии, что обе оси пересекаются и перпендикулярны, есть осевая симметрия.
- 65** Плоскости α , β , γ пересекаются в одной точке S . Найдите плоскость δ , которая при композиции $S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$ переходит в себя.

ГЛАВА 4

ВЕКТОРЫ

Математика есть способ называть разные вещи одним именем.

Жюль-Анри Пуанкаре
(французский математик и философ, 1854 – 1912)

§ 4.1



ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

Рассмотрим ещё один вид геометрических преобразований пространства – *параллельный перенос*, который важен и сам по себе и будет нужен нам для изучения очень важной главы курса геометрии «Векторы». В учебнике геометрии для 7–9 классов имеется целая глава 12 «Параллельный перенос» (стр. 189–192), где содержится большой материал, связанный с изучением свойств этого геометрического преобразования.

Дадим определение параллельного переноса.

Определение 30. Параллельным переносом называется такое геометрическое преобразование пространства, при котором каждая точка X переходит в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.

Поясним это определение для точек пространства.

Пусть нам даны точки X и Y пространства (рис. 4.1а).

Точки X и Y движутся (переходят) в точки X_1 и Y_1 по сонаправленным лучам XX_1 и YY_1 (в одном направлении) на равные расстояния $XX_1 = YY_1$ (рис. 4.1б).

На рис. 4.2 изображён параллельный перенос куба в направлении лучей BB' , DD' , D_1D_1' на расстояние $BB' = DD' = D_1D_1'$.

Мы знаем, что грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются противолежащими или противоположными (рис.4.3). Раньше мы доказывали, что у параллелепипеда противолежащие грани параллельны с помощью признака параллельности плоскостей.

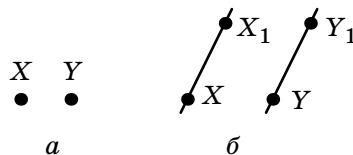


Рис. 4.1

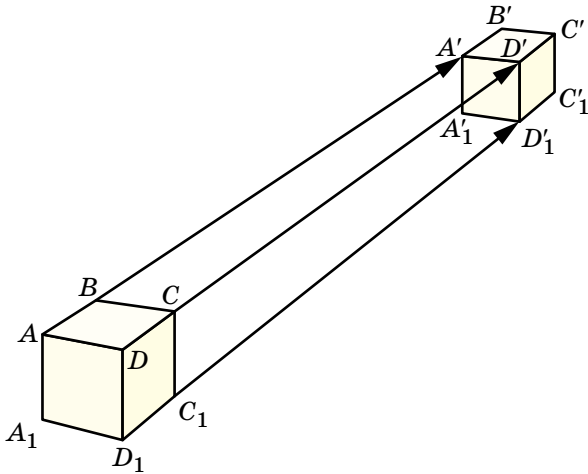


Рис. 4.2

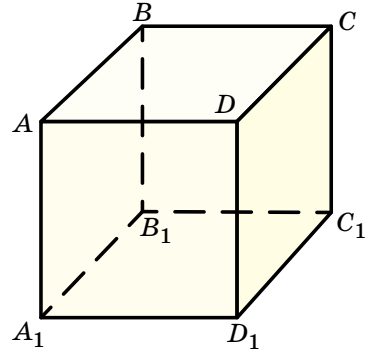


Рис. 4.3.

Теперь мы можем это доказать с помощью понятия параллельного переноса.

Теорема 17. У параллелепипеда противоположные грани параллельны и равны.

Доказательство

- | | | |
|--|---|-------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. 2. $AA_1 D_1 D$ и $BB_1 C_1 C$ – две противоположные грани. 3. Плоскости граней $AA_1 D_1 D$ и $BB_1 C_1 C$ параллельны, а сами грани равны (требуется доказать). | } | (дано) (рис.4.3.) |
|--|---|-------------------|

Параллельность граней (плоскостей) мы определяем с помощью признака параллельности плоскостей. Это подсказывает ход наших рассуждений.

4. Все грани параллелепипеда – параллелограммы (1, свойства параллелепипеда).

5. Прямая AD , параллельная прямой BC и прямая AA_1 и параллельна прямой BB_1 (4).

6. Плоскости рассматриваемых граней параллельны (5)

Равенство граней можно доказать, используя свойства параллельного переноса.

7. Все отрезки $A_1 B_1$, $D_1 C_1$, DC , AB параллельны и равны (6).

8. Грань $AA_1 B_1 D$ совмещается с гранью $BB_1 C_1 C$ параллельным переносом вдоль ребра AB на расстояние AB (7, свойства параллельного переноса).

9. Указанные грани равны (8, свойства параллельного переноса). ■

Параллельный перенос обозначается T_{AB} .

Запись $T_{AB}(X) = X_1$ читается так: параллельный перенос в направлении луча AB (или просто в направлении AB) на расстояние AB переводит точку X в точку X_1 (рис. 4.1).

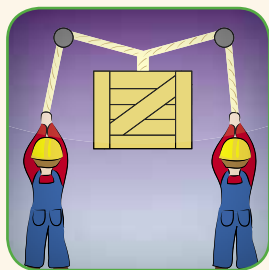
В учебнике геометрии для 7–9-го классов мы доказали следующую теорему и для плоскости, и для пространства.

Теорема 18. Параллельный перенос является изометрией.

Из этой теоремы следует, что параллельный перенос пространства переводит любую фигуру пространства в равную ей фигуру.

Кроме этого, ясно, что параллельный перенос переводит прямую в параллельную ей прямую, а плоскость в параллельную ей плоскость. Попробуйте доказать это самостоятельно.

§ 4.2



ВЕКТОРЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ С НИМИ

4.2.1 НАПРАВЛЕННЫЕ ОТРЕЗКИ

Сначала мы рассмотрим понятие *направленного отрезка*. Это отрезок, одна крайняя точка которого считается *начальной*, а вторая – *конечной*. Говорят также: *начало* и *конец* направленного отрезка. Имеется в виду, что указание начала и конца отрезка задаёт естественное *направление* этого отрезка – от начала к концу. При обозначении направленного отрезка сначала указывается начальная точка, а затем конечная, и над обозначением направленного отрезка изображают чёрточку или стрелочку. Ска-

жем, направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overrightarrow{AB}$ или $\overline{AB}$. Мы будем предпочитать первое обозначение, т.к. оно проще записывается.

Длиной направленного отрезка $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB . Можно сказать так: «Длиной направленного отрезка называется длина того отрезка, из которого он получен (выбором начальной и конечной точек)». Длина направленного отрезка $\overline{AB}$ обозначается $|\overline{AB}|$. Она также называется *модулем* направленного отрезка.



Направленные отрезки называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

На рис. 4.4 направленные отрезки $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{LK}$, $\overline{MN}$ коллинеарны.

Коллинеарность обозначается тем же знаком, что и параллельность. Скажем, на рис. 4.4 $\overline{CD} \parallel \overline{LK}$, $\overline{CD} \parallel \overline{MN}$, $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$ и т.д.

Возьмём два коллинеарных направленных отрезка и рассмотрим два луча, на которых лежат эти направленные отрезки, причём за начальную точку каждого луча возьмём начальную точку соответственного направленного отрезка. Два коллинеарных направленных отрезка называются *сонаправленными* или *противоположно направленными* в зависимости от того, будут ли сонаправленными или противоположно направленными эти лучи.

Если коллинеарные направленные отрезки не лежат на одной прямой, то их сонаправленность или противоположную направленность можно проверить следующим образом. Соединим начальные точки направленных отрезков и соединим их конечные точки. Если соединяющие отрезки не пересекаются, то направленные отрезки сонаправлены (рис. 4.5а), а если пересекаются, то противоположно направлены (рис. 4.5б).

Теперь рассмотрим важное понятие *равенства направленных отрезков*.



Направленные отрезки называются *равными*, если они коллинеарны, сонаправлены и имеют одинаковые длины.

Равенство направленных отрезков записывается с помощью обычного знака равенства. Например, на рис. 4.6 изображён куб $ABCA_1B_1C_1D_1$.

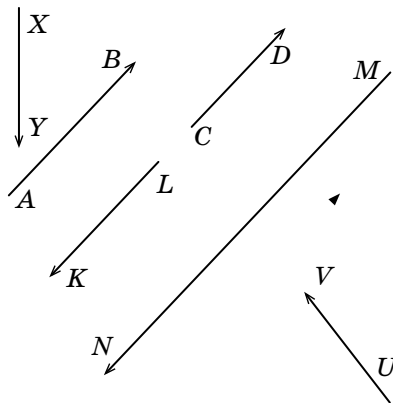


Рис. 4.4

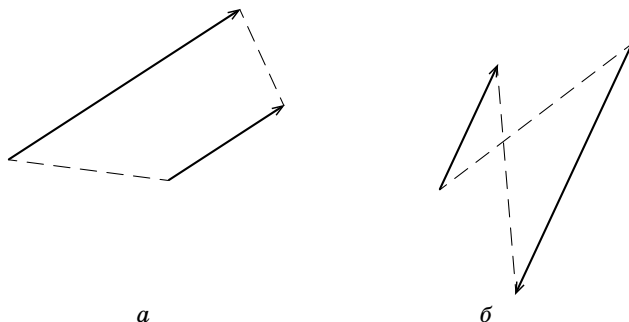


Рис. 4.5

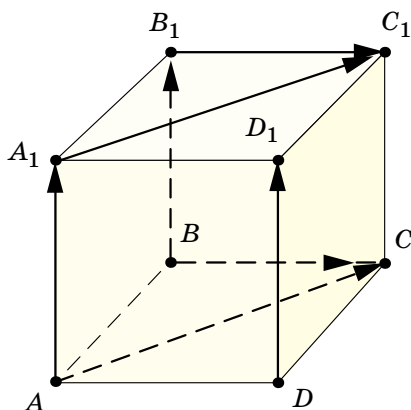


Рис. 4.6

Направленные отрезки $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{DD_1}$ на рис. 4.6 равны. Точно так же $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$, $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$.

Легко проверить справедливость следующего утверждения:



Два направленных отрезка, равные третьему направленному отрезку, равны между собой.

Сделайте это самостоятельно.

В пространстве мы будем часто говорить об откладывании направленного отрезка от данной точки.



От любой точки пространства можно отложить единственный направленный отрезок, равный данному.

Это значит следующее. Если дан направленный отрезок $\overline{AB}$ и взята произвольная точка C , то существует такой направленный отрезок $\overline{CD}$ (с началом в точке C), что $\overline{CD} = \overline{AB}$, причём такой направленный отрезок $\overline{CD}$ единственный. Доказательство этого утверждения можно провести самостоятельно, а можно обратиться к учебнику геометрии для 7–9 классов (стр. 199).

4.2.2 ВЕКТОРЫ

Мы рассмотрели понятие направленного отрезка, ввели понятие коллинеарности направленных отрезков и их равенства, установили, что от любой точки пространства можно отложить единственный направленный от-

резок, равный данному. Сейчас мы введём понятие вектора, обобщающее понятие направленного отрезка.

Определение 31. Совокупность всех равных друг другу направленных отрезков называется *свободным вектором*, или просто *вектором*.

Заметим, что направленные отрезки иногда называют *закреплёнными векторами*. У закреплённого вектора (направленного отрезка) вполне конкретное начало – единственная точка пространства, а свободный вектор может быть отложен от любой начальной точки, выбранной в пространстве произвольным образом.

Вектор можно обозначать так же, как любой направленный отрезок, указанием начальной и конечной точек одного из его возможных положений в пространстве, а можно обозначать строчной буквой латинского алфавита, над которой наверху поставлена чёрточка или стрелочка.

Можно сказать так: равные между собой направленные отрезки принято считать одним и тем же вектором, отложенным от различных начальных точек. На рис. 4.7 вектор $\vec{a}$ отложен от различных начальных точек.

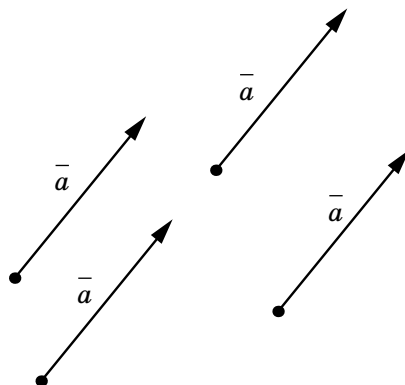


Рис. 4.7

Допуская вольность речи, часто говорят «начало вектора» или «конец вектора», имея в виду один из направленных отрезков, соответствующих этому вектору. Обычно такое словоупотребление не приводит к недоразумениям.

Понятия коллинеарности и длины, введённые для направленных отрезков, естественным образом переносятся на векторы. Два вектора называются коллинеарными, если коллинеарны соответствующие им направленные отрезки. Длиной вектора называется длина любого соответствующего ему направленного отрезка (длины этих направленных отрезков равны).

Введём важное для дальнейшей работы понятие нулевого вектора.

Определение 32. Вектор, соответствующий направленным отрезкам, начало и конец которых совпадают, называется *нулевым вектором* и обозначается $\vec{0}$. По определению нулевой вектор не имеет направления.

Длина нулевого вектора равна нулю: $|\vec{0}| = 0$.

Сравнивая определения параллельного переноса и вектора, можно сформулировать такое положение: *параллельный перенос на вектор $\vec{AB}$* означает, что мы производим преобразование в направлении луча AB на расстояние AB .

4.2.3 СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ

В учебнике по геометрии для 7–9 классов введены правила треугольника и параллелограмма для сложения векторов.

Напомним правило треугольника.

Определение 33. Для нахождения суммы двух произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нужно вектор $\vec{a}$ отложить от конца вектора $\vec{b}$ (говорят ещё «начало вектора $\vec{b}$ совместить с концом вектора $\vec{a}$ »). Тогда суммой $\vec{a} + \vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$ (рис. 4.8).

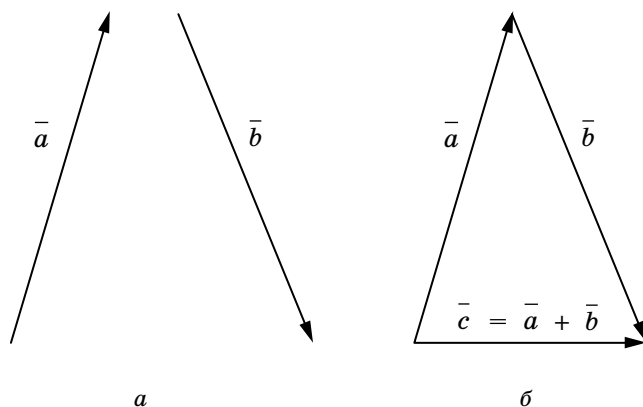


Рис. 4.8

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то возникает треугольник (см. рис. 4.8б), который и дал название этому правилу сложения векторов. Тем не менее, по правилу треугольника можно складывать и коллинеарные векторы.

Не коллинеарные между собой векторы можно складывать и по-другому – по правилу параллелограмма. Пусть нам даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, которые не коллинеарны (рис. 4.9а). Отложим эти векторы от некоторой точки А, т.е. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ (рис. 4.9б).

Тогда суммарный вектор изобразится диагональю $\overrightarrow{AC}$ параллелограмма $ABCD$, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Можно доказать, что сумма двух векторов, найденная по правилу треугольника, равна сумме этих же векторов, найденной по правилу параллелограмма.

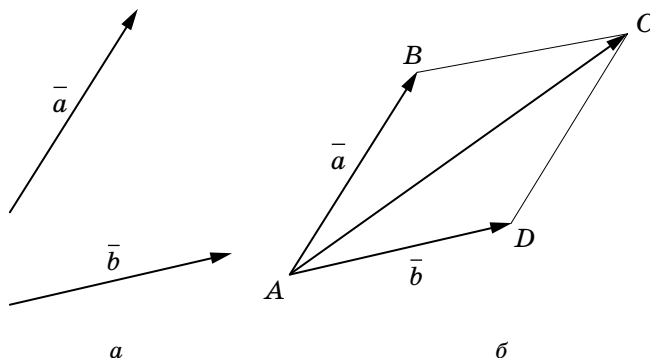


Рис. 4.9

Рассмотрим ещё один подход к введению определения суммы векторов – через понятие композиции геометрических преобразований.

Многие геометры употребляют понятия «параллельный перенос» и «вектор» как синонимы.

В этом случае приходится доказывать такую теорему.

Теорема 19. Композиция двух векторов (как двух параллельных переносов) есть вектор.

Доказательство

1. Пусть даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 4.10а).
2. Докажем, что их композиция есть некоторый вектор.
3. Рассмотрим две произвольные различные точки M и N . Имеем:
 $\bar{a}(M) = M_1$, $\bar{a}(N) = N_1$, $\bar{b}(M_1) = M_2$, $\bar{b}(N_1) = N_2$ (рис. 4.10б).
4. Композиция $\bar{b} \circ \bar{a}$ переводит точки M и N соответственно в точки M_2 и N_2 .
5. Для доказательства теоремы достаточно убедиться, что $\overline{MM_2} = \overline{NN_2}$.

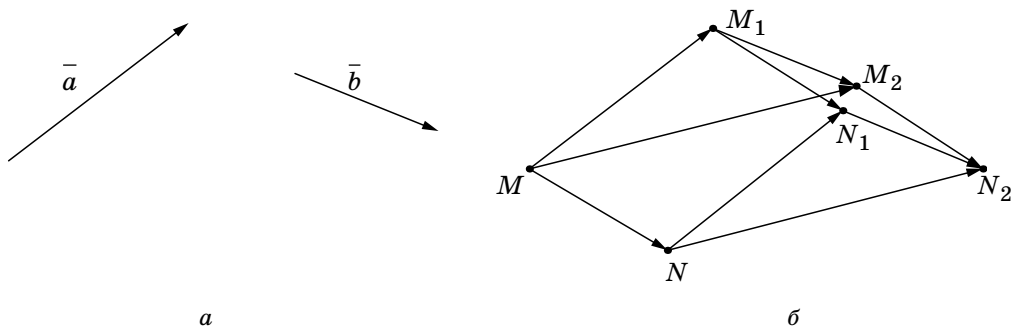


Рис. 4.10

6. Вектор (параллельный перенос) является изометрией; поэтому $MN = M_1N_1$ и $M_1N_1 = M_2N_2$.
7. Отсюда $MN = M_2N_2$.
8. Вектор переводит каждый луч в сонаправленный с ним луч.
9. Лучи MN и M_1N_1 сонаправленные, и лучи M_1N_1 и M_2N_2 тоже сонаправленные.
10. Отсюда следует, что лучи MN и M_2N_2 тоже сонаправленные.
11. Если лучи MN и M_2N_2 не лежат на прямой, то из п. 9 и п. 10 вытекает, что MNM_2N_2 – параллелограмм.
12. Тогда $\overline{MM_2} = \overline{NN_2}$.

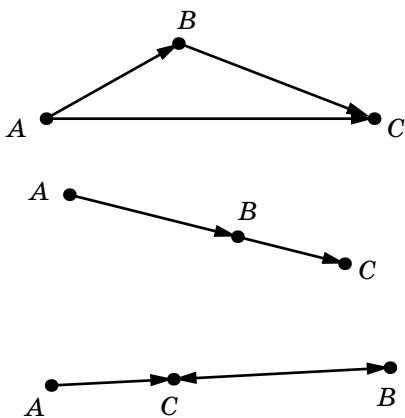


Рис. 4.11

13. Это равенство верно и в случае, когда лучи MN и M_2N_2 лежат на прямой. ■

Композицию векторов принято называть *суммой векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$. При этом вместо записи $\vec{b} \circ \vec{a} = \vec{c}$ пишут $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

Рассмотрим произвольные точки A, B, C (рис. 4.11).

Из теоремы о композиции двух векторов следует выполнение равенства $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Действительно, если $\overline{AB}$ переводит точку A в точку B , вектор $\overline{BC}$ переводит точку B в точку C , точка композиции этих векторов есть вектор, переводящий точку A в точку C .

Сложение векторов обладает следующими свойствами:

1. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (*закон поглощения нулевого вектора*);
2. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (*переместительный закон*);
3. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (*сочетательный закон*).

Эти свойства докажите самостоятельно.

4.2.4

СУММА ТРЁХ И БОЛЕЕ ВЕКТОРОВ. ПРОТИВОПОЛОЖНЫЙ ВЕКТОР

Введём понятие суммы трёх и большего числа векторов. Согласно сочетательному закону сложения векторов суммы $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ и $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ равны. Любую из этих сумм называют *суммой трёх векторов* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и записывают без скобок $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Сумма четырёх (и более) векторов определяется аналогично: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} + \vec{d} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \vec{d}$. Переместительный и сочетательный законы

сложения векторов позволяют как угодно переставлять и группировать слагаемые, при этом сумма векторов не изменяется.



Сумму трёх или более векторов можно найти, пользуясь *правилом многоугольника*.

1. Пусть надо найти сумму $\vec{s} = \vec{a_1} + \vec{a_2} + \vec{a_3} + \vec{a_4}$
2. Выберем произвольно точку A (рис. 4.12).

3. Откладываем последовательно векторы $\vec{AA_1} = \vec{a_1}$, $\vec{A_1A_2} = \vec{a_2}$, $\vec{A_2A_3} = \vec{a_3}$, $\vec{A_3A_4} = \vec{a_4}$ (каждый следующий от начала предыдущего).

4. Вектор $\vec{AA_4}$ равен искомой сумме $\vec{s}$.

5. Убедитесь в этом самостоятельно, применяя последовательно правило треугольника (рис. 4.12).

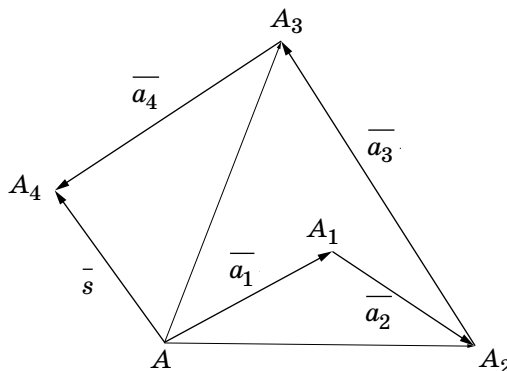


Рис. 4.12

Мы получили правило многоугольника для сложения нескольких векторов.

Для того, чтобы найти сумму $\vec{s} = \vec{a_1} + \vec{a_2} + \dots + \vec{a_n}$ векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$ ($n \geq 3$), надо сначала от произвольной точки A пространства отложить вектор $\vec{AA_1}$, равный $\vec{a_1}$, затем от точки A_1 отложить вектор $\vec{A_1A_2} = \vec{a_2}$ и т.д.; вектор $\vec{s} = \vec{AA_n}$, соединяющий начало первого и конец последнего вектора, и будет искомым.

Дадим определение противоположному вектору.

Определение 34. Два вектора, сумма которых равна нулевому вектору, называются противоположными.

Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$.

Таким образом, по определению

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

Нетрудно показать, что для любого вектора $\vec{a}$, противоположный вектор $-\vec{a}$ существует и единствен. Это следует из того, что вектором, противоположным вектору $\vec{AB}$, является, очевидно, вектор $\vec{BA}$. Таким образом, $\vec{BA} = -\vec{AB}$.

С помощью понятия противоположного вектора определяется операция *вычитания векторов в пространстве*.

Определение 35. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что сумма векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равна вектору $\vec{a}$, т.е. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Несложно убедиться, что разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна сумме вектора $\vec{a}$ и вектора $(-\vec{b})$ (рис. 4.13а):

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Если векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, отложенные от одной точки, построить до параллелограмма $ABCD$ (рис. 4.13б), то одна его направленная диагональ $\overrightarrow{AC}$ совпадает с суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (правило параллелограмма), а другая направленная диагональ $\overrightarrow{BD}$ – с разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

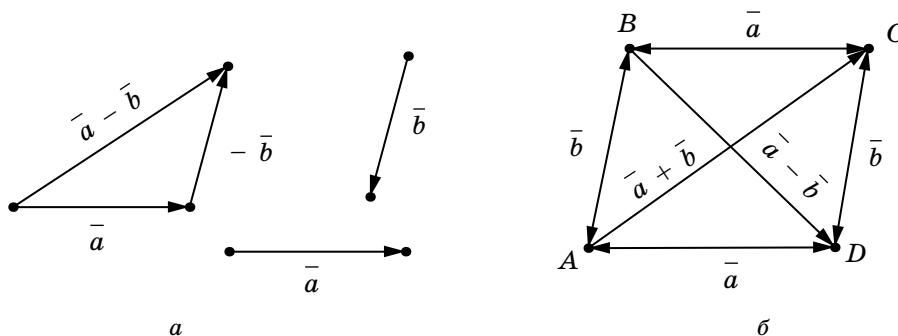


Рис. 4.13

4.2.5 ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Определение 36. Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число $p \neq 0$ называется коллинеарный ему вектор длиной $|p| \cdot |\vec{a}|$, сонаправленный с вектором $\vec{a}$, если $p > 0$, и противоположно направленный, если $p < 0$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число p обозначается $p \cdot \vec{a}$.

Таким образом:

- 1) $p \cdot \vec{a} \uparrow \vec{a}$, если $p > 0$ (рис. 4.14а) и $p \cdot \vec{a} \downarrow \vec{a}$, если $p < 0$ (рис. 4.14б);
- 2) $|p \cdot \vec{a}| = |p| \cdot |\vec{a}|$.

По определению для любого действительного числа p , любого вектора $\vec{a}$ и нулевого вектора $\vec{0}$ справедливы равенства:

$$p \cdot \vec{0} = \vec{0};$$

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}.$$

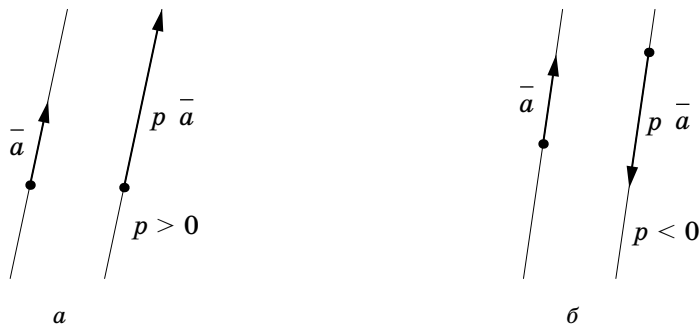


Рис. 4.14

Произведение вектора на число обладает следующими свойствами:

1. Для любого вектора $\vec{a}$ в пространстве справедливы равенства:

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \quad -1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}.$$

2. Сочетательный (ассоциативный) закон умножения вектора на число.

Для любых чисел p и q и вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $p(q\vec{a}) = (pq)\vec{a}$.

3. Распределительный (дистрибутивный) закон относительно векторного множителя, или первый распределительный закон.

Для любых чисел p и q и вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $(p+q)\vec{a} = p\vec{a} + q\vec{a}$.

4. Распределительный (дистрибутивный) закон относительно числового множителя, или второй распределительный закон.

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и числа p справедливо равенство $p(\vec{a} + \vec{b}) = p\vec{a} + p\vec{b}$.

Все эти свойства можно доказать самостоятельно.

Так же, как это было сделано в учебнике геометрии для 7–9 классов, можно доказать признак коллинеарности векторов в пространстве.

Теорема 20 (признак коллинеарности векторов). Для того, чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них был произведением другого на некоторое число.

4.2.6 КОМПЛАНАРНОСТЬ ВЕКТОРОВ

Определение 37. Три (или более) векторов называются компланарными, если они лежат или в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Это можно сформулировать и так: *векторы называются компланарными, если они параллельны какой-то одной плоскости (рис. 4.15).*

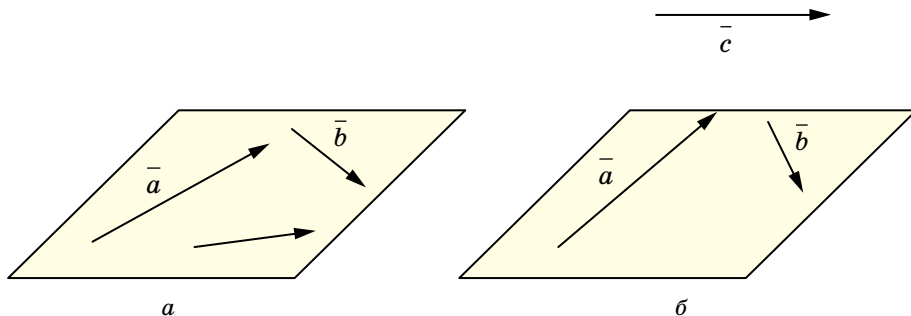


Рис. 4.15

Для трёх некомпланарных векторов имеется своё правило сложения – *правило параллелепипеда*.

1. Пусть нам даны три некомпланарных вектора (рис. 4.16а).
2. Отложим эти векторы от некоторой точки O (рис. 4.16б).

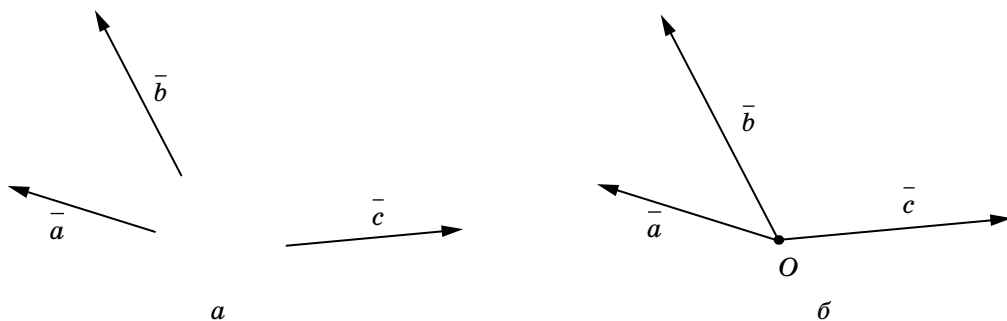


Рис. 4.16

3. Нам нужно найти сумму векторов $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
4. Построим параллелепипед, рёбрами которого являются отрезки OA , OB , OC .

Если вы никогда раньше не строили параллелепипед, то надо сначала вспомнить основные его свойства:

- а) все грани параллелепипеда – параллелограммы;
 - б) все его рёбра равны;
 - в) основания – равные параллелограммы;
 - г) противоположные грани параллельны и равны.
- После этого можно построить параллелепипед (рис. 4.16в).

5. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD}$ (3, 4, свойства параллелограмма)
6. $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DS}$ (3, 4, свойства параллелограмма)
7. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DS}$ (5, 6, свойства векторов)

8. $\overline{OA} + \overline{AD} + \overline{DS} = \overline{OA} + \overline{AS}$ (6, 7, свойства векторов)

9. Проведём диагональ параллелепипеда $\overline{OS}$ (построение, рис. 4.16в)

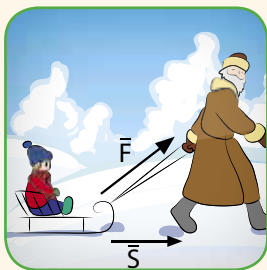
10. $\overline{OA} + \overline{AS} = \overline{OS}$ (8, свойство векторов)

11 (3). $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OS}$ (3, 7, 8, 9, 10)

Мы доказали теорему:

Теорема 21. Сумма трёх некомпланарных векторов, отложенных от одной точки, изображается той диагональю параллелепипеда, построенного на векторах-слагаемых, начало которой находится в той же точке.

§ 4.3



СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

4.3.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Рассмотренные нами ранее линейные операции над векторами очень похожи на операции над числами. Вместе с тем бывают и другие операции над векторами.

Из курса алгебры мы знаем, что для любых двух действительных положительных чисел a и b , если $b \neq 0$, определено их отношение $\frac{a}{b}$, которое показывает, во сколько раз первое число больше второго. Для векторов нет такой или похожей операции, т.е. вообще говоря, нет способа сравнивать два вектора $\underline{a}$ и $\underline{b}$. С помощью операции умножения вектора

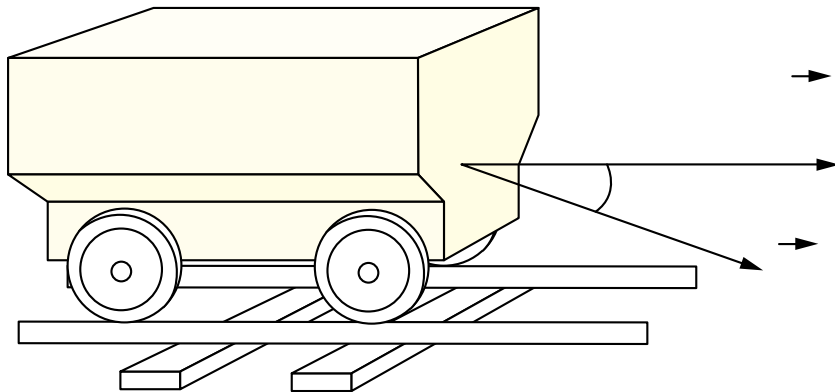


Рис. 4.17

на число мы умеем сравнивать коллинеарные векторы. Два коллинеарных вектора всегда «пропорциональны»: если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} = \lambda \vec{b}$. При этом: $\lambda > 0$ означает, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены; а $\lambda < 0$ означает, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены.

Рассмотрим ещё одну операцию над векторами – *скалярное произведение векторов*.

Сначала введём понятие *угла между векторами*.

Определение 38. Углом между двумя ненулевыми векторами называют угол между соответствующими им направленными отрезками, исходящими из одной точки.

Угол между противоположно направленными векторами равен 180° , а угол между сонаправленными равен 0° .

Итак, если нам даны два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 4.18а), то углом между этими векторами будет называться угол, образованный направленными отрезками $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенными от некоторой точки O (рис. 4.18б). При этом мы рассматриваем так называемый выпуклый угол.

Иногда угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$, читается: угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Запись $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ читается так: угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30° .

Используя понятие угла между векторами, дадим определение скалярного произведения векторов.

Определение 39. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними. Если хотя бы один из двух векторов нулевой, то их скалярное произведение равно 0.

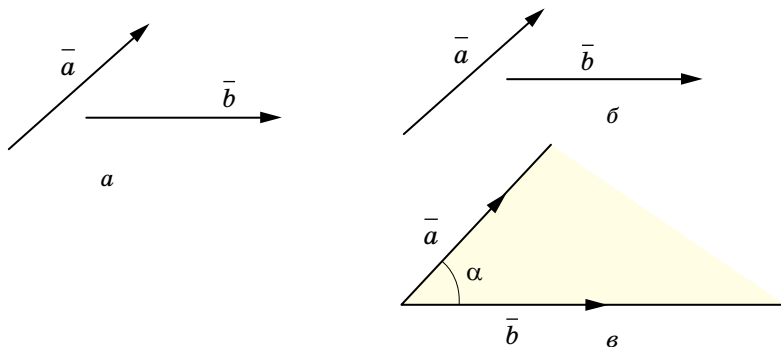


Рис. 4.18

Если угол между векторами равен φ , то их скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$.

Пример использования скалярного произведения векторов известен из физики. Механическая работа A , совершаемая постоянной силой $\vec{F}$ при перемещении $\vec{S}$ (рисунок к этому параграфу), равна скалярному произведению данных векторов: $\vec{F} \cdot \vec{S} = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos \varphi$.

Таким образом, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ – число, несмотря на то, что сомножители $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – векторы. Скалярное умножение – это первый в школьном курсе пример операции, когда исходные величины имеют одну природу, а результат операции – другую. Поэтому при рассмотрении свойств этой операции нельзя автоматически переносить на неё привычные свойства других алгебраических действий. Например, лишено смысла выполнение скалярного произведения трёх (и более) векторов, следовательно, не приходится говорить об ассоциативном законе для этой операции.

Рассмотрим некоторые свойства скалярного произведения векторов.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, т.е. $\vec{a} = \vec{b}$, то пишут $S = \vec{a}^2$ и говорят о «скалярном квадрате» вектора.

1. В этом случае $\cos \alpha = 1$, т.е. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Итак, скалярный квадрат вектора совпадает с квадратом его длины: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

2. $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$, причём из $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ следует $\vec{a} = \vec{0}$. Это свойство следует из первого свойства.

3. $(\lambda \vec{a} \cdot \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Слева в равенстве умножается вектор $\vec{a}$ на число λ , а затем вектор $(\lambda \vec{a})$ на вектор $\vec{b}$. Справа – число λ умножается на число $(\vec{a} \cdot \vec{b})$. Все три вида умножения различны. Доказательство проведите самостоятельно, при этом следует рассмотреть три случая: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$.

Можно доказать такую теорему:

Теорема 22. Два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно 0.

Доказательство. Нам даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1. Пусть $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (дано).

2. Из определения скалярного произведения имеем:

$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi = 0$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. По условию $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, тогда $\cos \varphi = 0$ и $\varphi = 90^\circ$.

4. Из п.4 следует, что $\vec{a} \perp \vec{b}$.

5. Пусть $\vec{a} \perp \vec{b}$ (дано), а φ – угол между векторами равен 90° .

6. По определению скалярного произведения векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$.



Скалярное умножение связано со сложением векторов распределительным (дистрибутивным) законом: $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.

Это свойство удобно использовать во многих случаях, в особенности при доказательстве теорем о перпендикулярных прямых и плоскостях. Сложность здесь в том, что часто в геометрии дистрибутивный закон доказывается с помощью некоторых из этих теорем. Мы проведём доказательство дистрибутивного закона, свободное от указанного недостатка: мы выведем закон из соотношения Лейбница для элементов треугольной пирамиды, а затем докажем это соотношение без использования теорем стереометрии. Соотношение Лейбница выражает расстояние от вершины треугольной пирамиды до точки пересечения медиан противоположной этой вершине грани пирамиды через длины всех шести её рёбер.

Теорема 23 (соотношение Лейбница). Пусть дана треугольная пирамида $OABC$ (рис. 4.19), у которой G – точка пересечения медиан треугольника ABC . Положим: $OG = d$, $OA = a$, $AB = c_1$, $OB = b$, $OC = c$, $BC = a_1$, $CA = b_1$. Тогда

$$d^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2).$$

А. Сначала покажем, как из соотношения Лейбница можно вывести распределительное свойство скалярного произведения векторов.

1. Положим $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{OG} = \vec{d}$ (дано). (рис. 4.19)

Следует помнить, что у нас $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$, $|\vec{c}| = c$, $|\vec{d}| = d$.

2. $\vec{AG} = 2\vec{GA}_1$, где A_1 – середина стороны BC (свойство медиан треугольника).

$$3. \overline{OG} - \bar{a} = 2(\overline{OA_1} - \overline{OG}).$$

Но $\overline{OA_1} = \frac{1}{2}(\bar{b} + \bar{c})$, поэтому
 $\overline{OG} - \bar{a} = -2\overline{OG} + (\bar{b} + \bar{c})$ или $\overline{OG} =$
 $= \frac{1}{3}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$ (1, 2, свойства операций над векторами).

$$4. d^2 = \overline{OG}^2 \Rightarrow d^2 = \frac{1}{9}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})^2 =$$

$$+ \bar{c})^2 = \frac{1}{9}(\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}))^2 =$$

$$= \frac{1}{9}(\bar{a}^2 + 2\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) + (\bar{b} + \bar{c})^2) =$$

$$= \frac{1}{9}(\bar{a}^2 + 2\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) + \bar{b}^2 + \bar{c}^2 + 2\bar{b}\bar{c}) = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2}{9}(\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) + \bar{b}\bar{c}).$$

$$5. \text{Т.к. } a_1^2 = |\overline{CB}|^2 = |\bar{b} - \bar{c}|^2 = (\bar{b} - \bar{c})^2; \quad b_1^2 = |\overline{AC}|^2 = |\bar{c} - \bar{a}|^2 = (\bar{c} - \bar{a})^2;$$

$$c_1^2 = |\overline{BA}|^2 = |\bar{a} - \bar{b}|^2 = (\bar{a} - \bar{b})^2, \text{ то из соотношения Лейбница имеем:}$$

$$d^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}((\bar{b} - \bar{c})^2 + (\bar{c} - \bar{a})^2 + (\bar{a} - \bar{b})^2) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) -$$

$$- \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2 - \bar{b}\bar{c} - \bar{a}\bar{c} - \bar{a}\bar{b}) \text{ или}$$

$$d^2 = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2}{9}(\bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{c}).$$

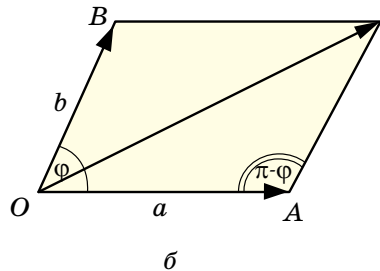
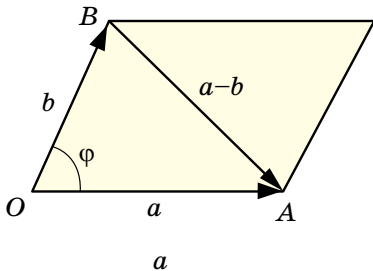


Рис. 4.20

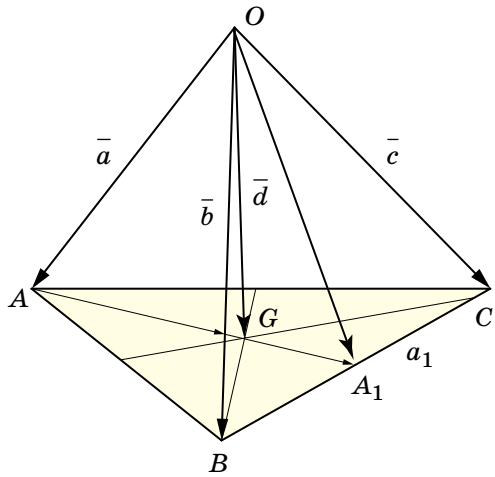


Рис. 4.19

6. Сопоставляя п.4. и п.5, находим:

$$\frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2}{9}(\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) + \bar{b}\bar{c}) = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2}{9}(\bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{c}).$$

7. Отсюда вытекает распределительное свойство скалярного произведения векторов: $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$.

В. Теперь докажем само соотношение Лейбница.

1. По теореме косинусов из треугольников OAG и OA_1G получим:

$$a^2 = d^2 + AG^2 - 2dAG\cos\varphi = d^2 + \frac{4}{9}AA_1^2 - \frac{4}{3}dAA_1\cos\varphi,$$

$$OA_1^2 = d^2 + A_1G^2 + 2dA_1G\cos\varphi = d^2 + \frac{1}{9}AA_1^2 + \frac{2}{3}dAA_1\cos\varphi.$$

2. Исключая φ , находим $a^2 + 2OA_1^2 = 3d^2 + \frac{2}{3}AA_1^2$.

3. $OA_1^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{a_1^2}{4}$, $AA_1^2 = \frac{1}{2}(b_1^2 + c_1^2) - \frac{a_1^2}{4}$ (1, 2) (это следует из

формулы, выражающей квадрат длины медианы треугольника через длины его сторон, которую вы знаете из курса геометрии 10-го класса).

4. Подставляя значения OA_1^2 и AA_1^2 в формулу п.2, получим:

$$a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a_1^2}{2} = 3d^2 + \frac{1}{3}(b_1^2 + c_1^2) - \frac{a_1^2}{6} \quad (2, 3).$$

5. $3d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{3}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$ или

$$d^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2). \quad \blacksquare$$

Заметим, что соотношение Лейбница остается в силе и тогда, когда точка O лежит в плоскости треугольника ABC .

Операции над векторами имеют определённый геометрический смысл, поэтому они находят широкое применение при решении геометрических задач и при доказательстве теорем.

4.3.2

ПРИМЕНЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Скалярное произведение векторов широко применяется при решении задач и при доказательстве теорем.

Дадим ещё одно доказательство теоремы 8, которую мы сформулировали и доказали в предыдущей главе:



Осевая симметрия пространства является изометрией.

Доказательство

1. Дана осевая симметрия с осью l такая, что $A_1 = S_l(A)$, $B_1 = S_l(B)$ (рис. 4.21).

Требуется доказать, что $AB = A_1B_1$.

2. Для того, чтобы доказать равенство в п.2, достаточно доказать, что $AB^2 - A_1B_1^2 = 0$.

3. Введем обозначения: середины отрезков AA_1 и BB_1 обозначим через A_0 и B_0 (рис. 4.21), за начало векторов выберем произвольную точку O .

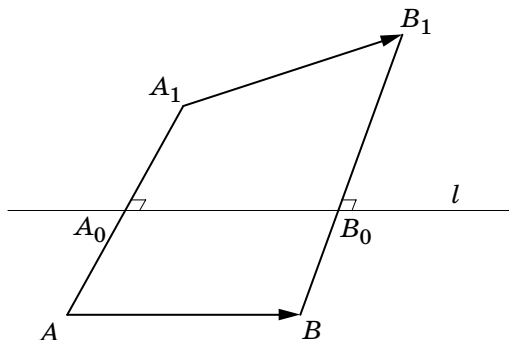


Рис. 4.21

$$\begin{aligned}
 4. \quad \overline{AB}^2 - \overline{A_1B_1}^2 &= (\overline{OA} - \overline{OB})^2 - (\overline{OA_1} - \overline{OB_1})^2 = \\
 &= (\overline{OA} - \overline{OB} + \overline{OA_1} - \overline{OB_1})(\overline{OA} - \overline{OB} + \overline{OA_1} - \overline{OB_1}) = \\
 &= [(\overline{OA} + \overline{OA_1}) - (\overline{OB} + \overline{OB_1})] \cdot [(\overline{OA} - \overline{OA_1}) + (\overline{OB_1} - \overline{OB})] = \\
 &= (2\overline{OA_0} - 2\overline{OB_0}) \cdot (\overline{A_1A} + \overline{BB_1}) = 2\overline{A_0B_0}(\overline{A_1A} + \overline{BB_1}) = \\
 &= 2(\overline{A_0B_0} \cdot \overline{A_1A} + \overline{A_0B_0} \cdot \overline{BB_1}) = 0 \text{ (свойство перпендикулярности векторов)}.
 \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 1

В равнобедренном треугольнике медианы, проведённые к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите величину угла между боковыми сторонами этого треугольника.

Решение

1. $\triangle ABC$ – равнобедренный, BC – основание $\triangle ABC$ (дано)
2. BB_1 и CC_1 – медианы $\triangle ABC$, причём $BB_1 \perp CC_1$ (рис. 4.20)
3. $\angle A = \varphi$ (требуется найти).

Можно получить некоторые следствия из данных задачи:

4. $AB = AC$ (1, свойства равнобедренного треугольника)
5. $BC_1 = C_1A$ и $CB_1 = B_1A$ (2, свойства медианы треугольника)

Мы хотим использовать векторы, поэтому введём следующие обозначения:

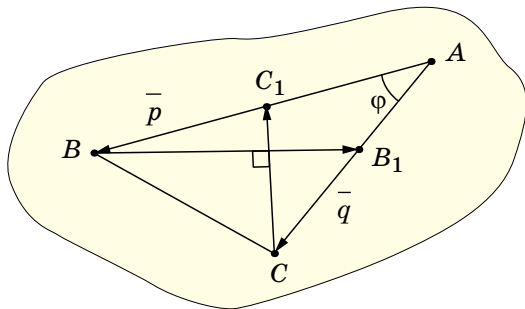


Рис. 4.22

$\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ – данные векторы.

6. Медианы $\overline{BB_1}$ и $\overline{CC_1}$ по условию перпендикулярны (рис. 4.22), поэтому $\overline{BB_1} \cdot \overline{CC_1} = 0$. (2, свойства скалярного произведения векторов).

7. Разложим векторы $\overline{BB_1}$ и $\overline{CC_1}$ по векторам $\overline{p} = \overline{AB}$ и $\overline{q} = \overline{AC}$:

$$\overline{BB_1} = \overline{AB_1} - \overline{AB} = \frac{1}{2} \overline{q} - \overline{p}, \quad \overline{CC_1} = \overline{AC_1} - \overline{AC} = \frac{1}{2} \overline{p} - \overline{q} \quad (4, 5, 6,$$

операции над векторами).

8. Из п.п. 6 и 7 следует: $(\frac{1}{2} \overline{q} - \overline{p}) \cdot (\frac{1}{2} \overline{p} - \overline{q}) = 0$,

$$9. \frac{1}{4} \overline{p} \cdot \overline{q} - \frac{1}{2} \overline{q}^2 - \frac{1}{2} \overline{p}^2 + \overline{p} \cdot \overline{q} = 0,$$

$$\frac{5}{4} \overline{p} \cdot \overline{q} - \frac{1}{2} \overline{q}^2 - \frac{1}{2} \overline{p}^2 = 0 \quad (8).$$

10. Обозначив $|\overline{p}| = |\overline{q}| = m$ и угол между векторами $\overline{p}$ и $\overline{q}$ через φ , воспользуемся определением скалярного произведения:

$$\frac{5}{4} m^2 \cos \varphi - m^2 = 0.$$

11. $\cos \varphi = 0,8$; $\varphi \approx 37^\circ$.

ЗАДАЧА 2

В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 4.23) грань $ABCD$ – квадрат со стороной a , ребро AA_1 также равно a и образует с рёбрами AB и AD углы, равные α . Найдите длину диагонали BD_1 и угол между прямыми BD_1 и AC .

Решение

1. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – параллелепипед.

2. $ABCD$ – квадрат.

3. $AA_1 = a$ и AA_1 образует с AB и AD равные углы α .

4. Найдите BD_1 и угол между прямыми BD_1 и AC .

Найдём сначала BD_1 .

5. Введём векторы $\overline{p} = \overline{AB}$, $\overline{q} = \overline{AD}$, $\overline{r} = \overline{AA_1}$.

} (дано)
(рис. 4.23)

6. Разложим вектор $\overrightarrow{BD_1}$ по векторам $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{r}$.

7. Имеем $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{q}) - \overrightarrow{p} = \overrightarrow{r} + \overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}$ (1, 5, правило разложения вектора).

8. Рассмотрим $|\overrightarrow{BD_1}|^2$.

$|\overrightarrow{BD_1}|^2 = \overrightarrow{BD_1}^2 = (\overrightarrow{r} + \overrightarrow{q} - \overrightarrow{p})^2 = \overrightarrow{r}^2 + \overrightarrow{q}^2 + \overrightarrow{p}^2 + 2\overrightarrow{r}\overrightarrow{q} - 2\overrightarrow{r}\overrightarrow{p} - 2\overrightarrow{q}\overrightarrow{p} = a^2 + a^2 + a^2 + 2a^2\cos\alpha - 2a^2\cos\alpha - 2a^2\cos 90^\circ = 3a^2$ (3, 7, определение скалярного произведения векторов).

9. $|\overrightarrow{BD_1}|^2 = a\sqrt{3}$.

Угол φ между прямыми BD_1 и AC найдём, пользуясь определением скалярного произведения двух векторов:

10. $\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BD_1}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$ (1, 2, определение скалярного произведения векторов).

11. Находим $\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{r} + \overrightarrow{q} - \overrightarrow{p}) \cdot (\overrightarrow{q} + \overrightarrow{p}) = \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{q} + \overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{p} - \overrightarrow{p}^2 + \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{q} + \overrightarrow{q}^2 - \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} = 2a^2\cos\alpha$ (6, свойства операций над векторами).

12. $\cos\varphi = \frac{|2a^2\cos\alpha|}{a\sqrt{3}a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|\cos\alpha|$ (10, 11). ■

В курсе геометрии 10-го класса мы дали определение перпендикулярности прямой и плоскости и доказали признак перпендикулярности прямой и плоскости. Там мы не доказывали общий признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости в общем виде формулируется так:

Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то эта прямая и плоскость взаимно перпендикулярны.

Докажем этот признак с использованием векторов.

Доказательство

1. $a \perp b$, $a \perp c$

2. $b \cap c = O$.

3. $b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$.

4. $a \perp \alpha$ (требуется доказать).

} (дано)
(рис. 4.24)

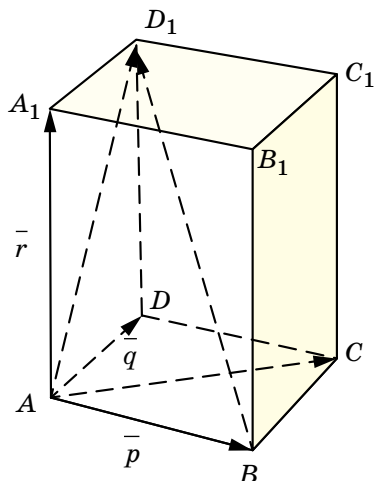


Рис. 4.23

Для доказательства п. 4 нужно убедиться в том, что прямая a перпендикулярна к любой прямой d , лежащей в плоскости α .

5. Рассмотрим произвольную прямую d , лежащую в плоскости α (рис. 4.24б).

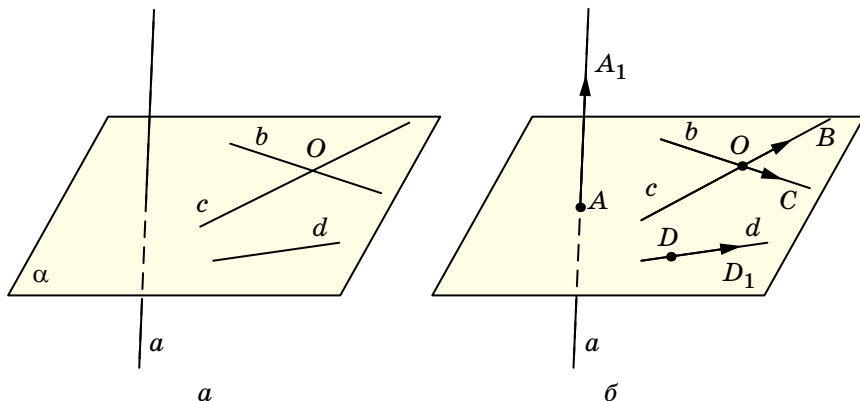


Рис. 4.24

6. На прямых b и c выберем соответственно точки B и C , отличные от точки O ; на прямых a и d выберем пары несовпадающих точек A и A_1 , D и D_1 (рис. 4.24 б).

7. Введём векторы на прямых a , b , c , d так, как показано на рис. 4.24 б.

8. Разложим вектор $\overrightarrow{DD_1}$ по неколлинеарным векторам $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. $\overrightarrow{DD_1} = x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}$ (6, 7, правило разложения векторов).

Если мы докажем, что скалярное произведение векторов $\overrightarrow{DD_1}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ равно 0, то мы докажем перпендикулярность прямых a и d .

9. Обе части равенства в п. 8 умножим скалярно на вектор $\overrightarrow{AA_1}$. Используя распределительный закон скалярного умножения векторов, получим: $\overrightarrow{DD_1} \cdot \overrightarrow{AA_1} = x\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AA_1} + y\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AA_1}$ (8, распределительный закон).

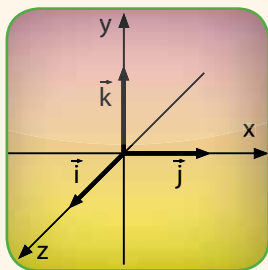
10. $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0$ (1, свойства скалярного произведения векторов).

11. $\overrightarrow{DD_1} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0$ (9, 10).

12. $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{DD_1}$ (11, свойства скалярного произведения векторов).

13. (4) $a \perp \alpha$ (12, определение перпендикулярности прямой и плоскости). ■

§ 4.4



БАЗИС НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

В курсе геометрии 7–9 классов мы рассматривали вопрос о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам (теорема 61, стр. 209). Сформулируем эту теорему.

Теорема 24. Пусть $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ – два неколлинеарных вектора, лежащих в некоторой плоскости. Тогда для любого вектора $\vec{d}$, лежащего в этой плоскости, существуют числа x и y такие, что $\vec{d} = x \vec{l}_1 + y \vec{l}_2$, причём эти числа определяются единственным образом.

При этом векторы $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ мы будем называть *базисными векторами* на плоскости.

Принципиальным отличием пространства от плоскости является наличие у него трёх измерений.

Определение 40. Упорядоченная тройка из любых трёх некомпланарных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называется базисом в пространстве.

Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называются при этом *базисными векторами* в пространстве.

Определение 41. Говорят, что вектор $\vec{a}$ разложен по трём некомпланарным векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, если его можно представить в виде $\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$, где x_1, x_2, x_3 – некоторые числа.

Говорят также, что вектор $\vec{a}$ является *линейной комбинацией* векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Трёхмерность пространства и означает, что любой вектор пространства является линейной комбинацией именно трёх базисных векторов. Докажем соответствующую теорему.

Теорема 25. Любой вектор $\vec{a}$ пространства однозначно представляется в виде линейной комбинации трёх базисных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3.$$

Доказательство

1. Если вектор $\vec{a}$ компланарен с какими-либо двумя векторами из базисных векторов, например, с векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, то $\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$ для некоторых x_1 и x_2 , откуда $\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$, т.е. вектор $\vec{a}$ – линейная комбинация базисных векторов.

2. Пусть теперь вектор $\vec{a}$ не компланарен ни с какими двумя из базисных векторов (рис. 4.26а).

3. Докажем, что и в этом случае его можно представить в виде линейной комбинации этих векторов.

4. Отложим все четыре вектора от произвольной точки O пространства (рис. 4.26б).

5. Через векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ и точку O проведём плоскость α (построение, рис. 4.25б)

6. Аналогично проведём плоскости β (векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_3$), γ (векторы $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$).

7. Через конец вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OD}$ – точку D – проведём плоскости, соответственно параллельные плоскостям α, β, γ (рис. 4.26б).

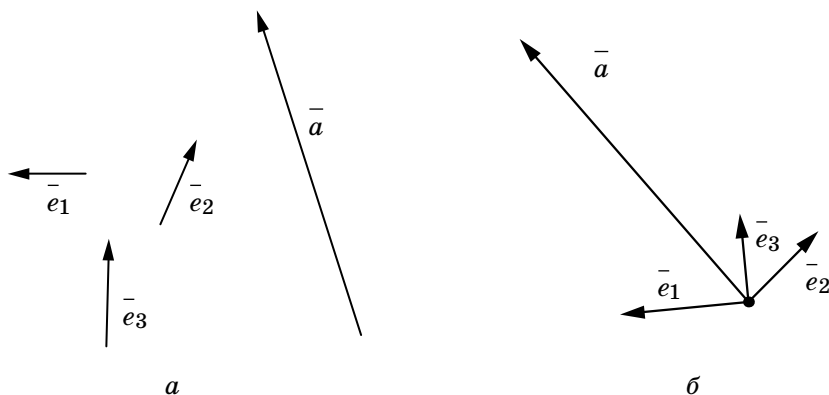


Рис. 4.25

8. Отрезок OD в получившемся параллелепипеде является диагональю, и значит, по правилу параллелепипеда $\vec{a} = \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ (правило параллелепипеда сложения векторов).

9. Но векторы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ коллинеарны соответственно базисным векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, поэтому найдутся числа x_1 , x_2 , x_3 соответственно такие, что $\vec{OA} = x_1 \vec{e}_1$, $\vec{OB} = x_2 \vec{e}_2$, $\vec{OC} = x_3 \vec{e}_3$ (свойства векторов).

10. Таким образом, $\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$, т.е. вектор $\vec{a}$ – линейная комбинация базисных векторов (рис. 4.26).

11. Докажем теперь, что коэффициенты x_1 , x_2 , x_3 в разложении вектора $\vec{a}$ по базисным векторам определяются однозначно.

12. Предположим противное, т.е. что существуют другие коэффициенты y_1 , y_2 , y_3 в разложении вектора $\vec{a}$ по векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$: $\vec{a} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3$.

13. Вычитая это равенство из предыдущего, получим:

$$\vec{0} = (x_1 - y_1) \vec{e}_1 + (x_2 - y_2) \vec{e}_2 + (x_3 - y_3) \vec{e}_3.$$

14. Пусть, например,

$x_1 \neq y_1$, т.е. $x_1 - y_1 \neq 0$.

15. Из полученного равенства имеем

$$\vec{e}_1 = \frac{x_2 - y_2}{x_1 - y_1} \vec{e}_2 - \frac{x_3 - y_3}{x_1 - y_1} \vec{e}_3 \quad (14),$$

т.е. в этом случае вектор $\vec{e}_1$ – линейная комбинация векторов $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.

16. Но в силу признака компланарности это означало бы компланарность векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, что противоречит определению базиса.

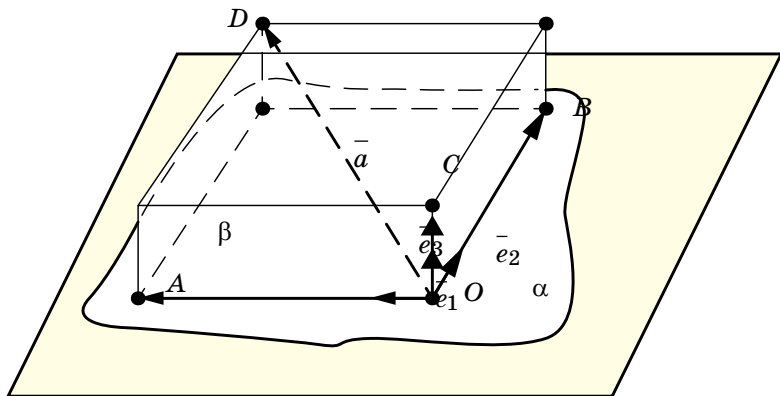


Рис. 4.26



ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ. ГОМОТЕТИЯ И ЕЁ СВОЙСТВА

4.5.1 ПОДОБИЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФИГУР

В главе 14 учебника геометрии для 7–9 классов мы рассмотрели подобные треугольники и многоугольники.

До этого мы достаточно подробно изучали свойства равных фигур, которые имеют одинаковую форму и размеры. Однако в окружающем нас мире часто встречаются предметы, одинаковые по форме, но различные по размерам. Мыльный пузырь и футбольный мяч, небольшая модель ледокола и сам корабль, карты, фотоснимки различных размеров одного и того же здания – всё это примеры фигур, имеющих одинаковую форму, но разные размеры. В геометрии такие фигуры называются *подобными*.

На рис. 4.27 изображены подобные друг другу круги.



Все круги подобны между собой. Все окружности подобны между собой.

На рис. 4.28а изображены различные квадраты, а на рис. 4.28б различные кубы.

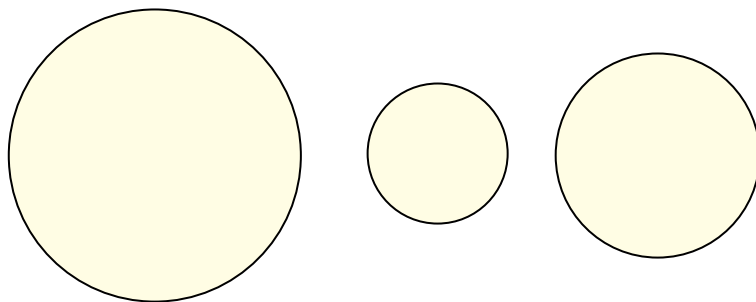


Рис. 4.27

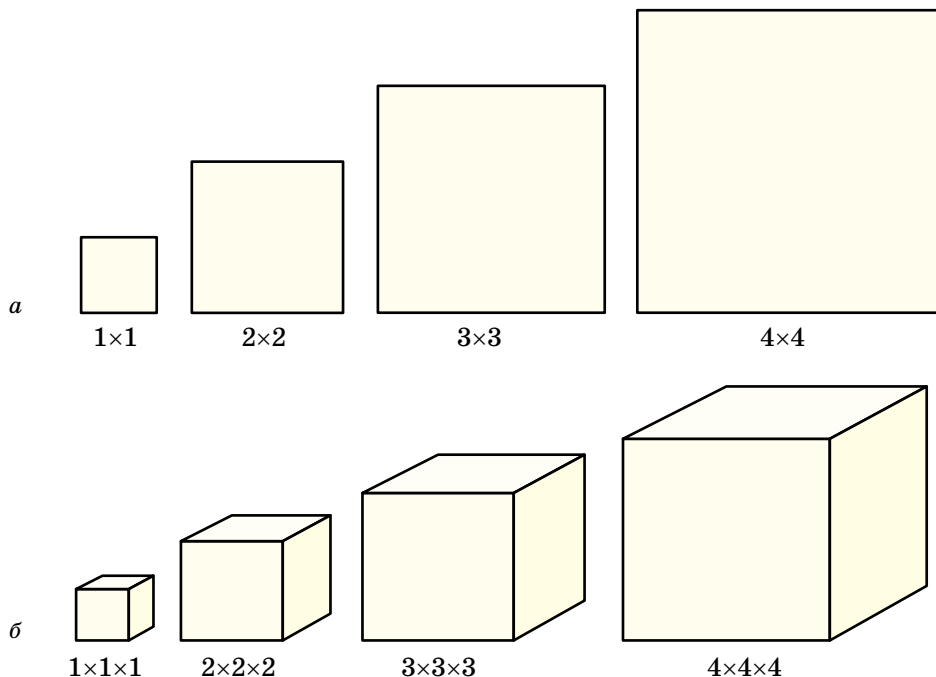


Рис. 4.28



Все квадраты подобны между собой и все кубы подобны между собой (рис. 4.28).

Ясно, что сделанные утверждения нужно обосновать, пока мы их будем воспринимать как наглядно-ясные факты, но затем докажем их строго.

На рис. 4.29 приведены две подобные между собой фотографии одного и того же здания.

На рис. 4.30 изображены три шара, подобные друг другу.

Для обозначения подобия фигур употребляется знак « $\sim$ ».

На рис. 4.31 изображены две подобные фигуры Φ_1 и Φ_2 . Запись « $\Phi_1 \sim \Phi_2$ » читается: фигура Φ_2 подобна фигуре Φ_1 .

Для подобных фигур вводится понятие – *коэффициент подобия*, он обозначается k ; k всегда больше нуля. Коэффициент подобия показывает, в каком отношении находятся соответствующие расстояния между точками фигур. На рис. 4.31 коэффициент подобия можно определить, найдя отношение сторон квадратиков изображённой сетки.

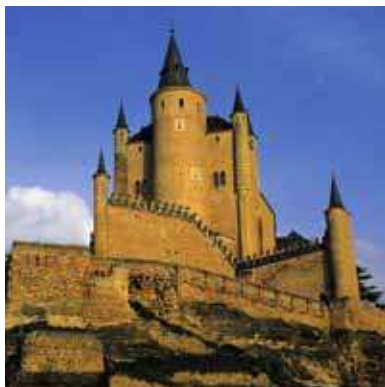


Рис. 4.29

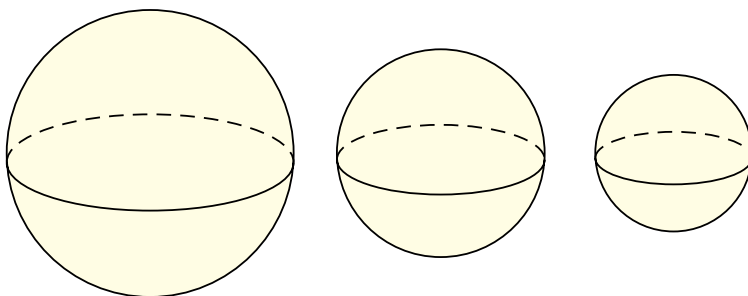


Рис. 4.30

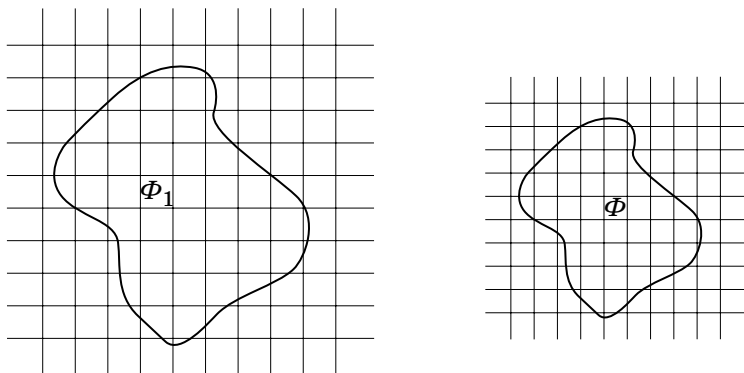


Рис. 4.31



Определите коэффициент подобия фигур, изображённых на рис. 4.31 и рис. 4.33.

Подобие фигур широко используется при разработке планов построек зданий или при изображении на картах участков земной поверхности (рис. 4.32).

Всякий план или карта являются подобным изображением реального объекта или участка земной поверхности, т.е. фигурой, подобной реальному объекту. При этом план или карта может изображать реальный объект в разном *масштабе*.



Масштаб – это коэффициент подобия соответствующих фигур.

Например, если масштаб 1 : 1000000, это означает, что в одном сантиметре плана или карты содержится 1000000 см, т.е. 10 км реального размера объекта.

На рис. 4.33 изображён кролик в разных масштабах.



Рис. 4.32

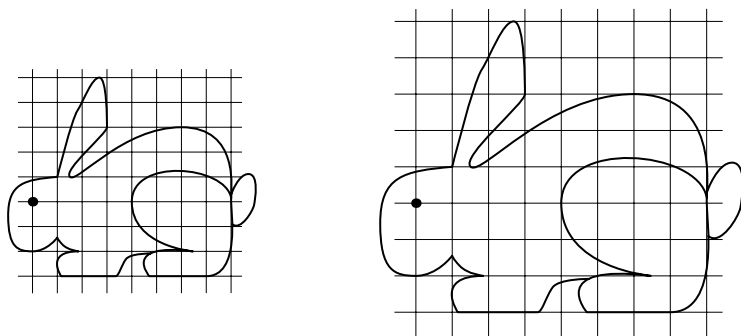


Рис. 4.33

4.5.2* ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ



Подобные фигуры можно получить при выполнении так называемых *преобразований подобия*.

Рассмотрим определение и некоторые свойства преобразований подобия.

Определение 42. Геометрическое преобразование пространства называется *преобразованием подобия*, если при этом преобразовании расстояния между соответствующими точками изменяются в одно и то же число раз, т.е. для любых двух точек X и Y фигуры F и X_1 и Y_1 фигуры F_1 , в которые они переходят, $X_1Y_1 = kXY$.

Преобразование подобия переводит прямые в прямые, полупрямые в полупрямые, отрезки в отрезки и сохраняет углы между полупрямыми. Преобразование подобия переводит плоскости в плоскости.

Если сравнить определения подобных фигур и преобразования подобия, то получим важный вывод:



Фигуры называются подобными, если они переводятся одна в другую преобразованием подобия.

Это значит, что если произвольные точки X и Y фигуры F при преобразовании подобия переходят в точки X_1 и Y_1 фигуры F_1 , то $X_1Y_1 = kXY$, причём число k – одно и то же для всех точек X, Y . Число k является коэффициентом подобия.

При $k = 1$ преобразование подобия, очевидно, является изометрией.

Рассмотрим некоторые свойства преобразований подобия.

Теорема 26. Преобразование подобия сохраняет отношения длин отрезков.

Доказательство.

1. Пусть нам дано преобразование подобия F , которое отрезок AB переводит в отрезок A_1B_1 .

2. Имеются два отрезка AB и CD , которые при преобразовании F переходят в отрезки A_1B_1 и C_1D_1 .

3. Надо доказать, что $\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{AB}{CD}$.

4. Так как $A \rightarrow A_1, B \rightarrow B_1, C \rightarrow C_1, D \rightarrow D_1$, то по определению 42 $A_1B_1 = k \cdot AB$ и $C_1D_1 = k \cdot CD$.

5. Отсюда, поделив левые и правые части этих равенств, получаем:

$$\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{AB}{CD}.$$

Используя теорему 26, можно доказать следующее следствие:
Преобразование подобия переводит равные отрезки в равные, а середину отрезка в середину его образа.

4.5.3 ГОМОТЕТИЯ И ЕЁ СВОЙСТВА

Преобразование подобия тесно связано с его конкретным видом – *гомотетией* и её свойствами. Понятие гомотетии вводится на основе использования векторного аппарата.

В пространстве возьмём произвольную точку O и зададим любое число $k \neq 0$. Произвольно взятой точке X поставим в соответствие такую точку X_1 , что $\overrightarrow{OX_1} = k \overrightarrow{OX}$. Если точка X совпадает с точкой O , то X_1 есть точка O , т.е. точка O переходит сама в себя.

Очевидно, что установленное таким образом соответствие между точками пространства будет геометрическим преобразованием.

Что это за преобразование?

1. Возьмём две точки A и B , отличные от O . Пусть им соответствуют точки A_1 и B_1 (рис. 4.34).

2. Здесь возможны два случая:

- а) прямая AB не проходит через точку O ;
- б) прямая AB проходит через точку O .

3. В обоих случаях $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1}$.

4. Но $\overrightarrow{OB_1} = k \cdot \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA_1} = k \cdot \overrightarrow{OA}$.

5. Значит, $\overrightarrow{A_1B_1} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$.

6. В свою очередь, $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.

7. И, окончательно: $\overrightarrow{A_1B_1} = k \overrightarrow{AB}$.

8. Отсюда, $|\overrightarrow{A_1B_1}| = |k| \cdot |\overrightarrow{AB}|$.

Согласно определению 42 рассматриваемое преобразование является преобразованием подобия. Коэффициент подобия равен $|k|$.

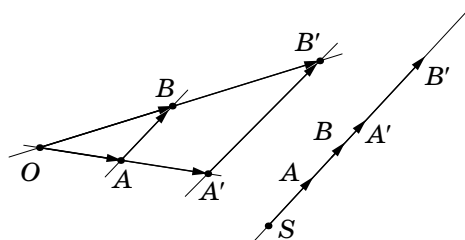


Рис. 4.34

Определение 43. Геометрическое преобразование пространства с неподвижной точкой O , которое всякой точке X , отличной от O , ставит в соответствие такую точку X_1 , что $\overrightarrow{OX_1} = k \cdot \overrightarrow{OX}$, где k – наперёд заданное число, не равное 0, называется *гомотетией* с центром O и коэффициентом k .

Мы уже доказали выше следующее свойство гомотетии.

Свойство 1. Гомотетия с коэффициентом k есть преобразование подобия с коэффициентом подобия $|k|$.

Рассмотрим ещё два свойства.

Свойство 2. Гомотетия переводит всякую прямую в параллельную ей прямую.

1. Если прямой a соответствует прямая a' , то, взяв на a произвольные точки A и B , мы получим, что вектор $\overline{A'B'}$ коллинеарен вектору $\overline{AB}$, где A' – образ точки A , а B' – образ точки B .

2. Кроме того, A' и B' принадлежат, конечно, прямой a' .

3. Отсюда $a' \parallel a$.

Замечание. Следует иметь в виду, что здесь снова к параллельным прямым причисляются и совпадающие прямые.

Свойство 3. Гомотетия переводит всякую плоскость в параллельную ей плоскость.

Докажите это свойство самостоятельно.



Как можно задать гомотетию?

Непосредственно из определения гомотетии следует, что её можно задать указанием центра и коэффициента гомотетии. Однако удобнее задавать гомотетию, пользуясь следующим свойством.

Свойство 4. Всякая гомотетия может быть задана центром гомотетии и парой соответствующих друг другу точек.

Самостоятельно объясните это свойство.

Заметьте, что определение преобразования подобия в отличие от определения гомотетии неконструктивно, т.е. оно не даёт никакого конкретного способа (или конструкции), позволяющего находить точку A_1 по заданной точке A . Однако имеет место следующее важное свойство преобразования подобия, показывающее, каким именно может быть этот способ.

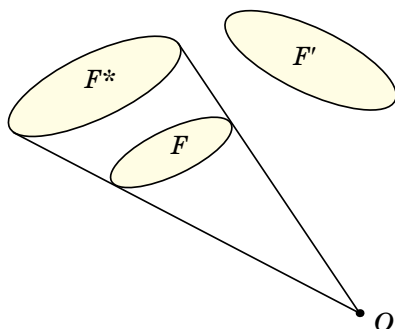


Рис. 4.35



Всякое преобразование подобия сводится к последовательному выполнению гомотетии и некоторой изометрии.

Это утверждение мы доказывать не будем.

На рис. 4.35 изображены две подобные фигуры F и F' . Мы построили фигуру F^* , гомотетичную фигуре F и равную фигуре F' . Обоснуйте самостоятельно этот вывод.



ПРИМЕНЕНИЯ ПОДОБИЯ И ГОМОТЕТИИ



Преобразования подобия и гомотетии фигур широко используются в геометрии, в технике и в практической деятельности людей. Рассмотрим некоторые из этих применений.

4.6.1 ГОМОТЕТИЯ И СЕЧЕНИЯ ПИРАМИДЫ ПЛОСКОСТЬЮ

Мы уже несколько раз говорили о пирамиде, её сечениях плоскостью и о свойствах усечённой пирамиды.

Докажем теорему.

Теорема 27. Если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной её основанию, то в сечении получится многоугольник, гомотетичный основанию, причём центром гомотетии служит вершина пирамиды.

Доказательство

1. $SAB CDEF$ – пирамида.
2. SO – высота пирамиды.
3. Плоскость α параллельна плоскости основания пирамиды.
4. SO пересекает плоскость α в точке O_1 .

} (дано)
(рис. 4.36)

5. Многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ гомотетичен многоугольнику $ABCDEF$ с центром гомотетии – точкой S (требуется доказать).

6. Рассмотрим гомотетию с центром в вершине пирамиды S и коэффициентом $k = SO_1 : SO$ (1, 2, 4, определение гомотетии).

7. Эта гомотетия переводит точку O в O_1 , а плоскость нижнего основания, содержащую O , – в плоскость, ей параллельную и проходящую через O_1 , т.е. в плоскость α (6, свойства гомотетии) (рис. 4.36).

Теперь докажем п. 5.

8. Рассмотрим точку M – произвольную точку основания пирамиды $ABCDEF$. Гомотетичная точке M точке принадлежит лучу SM и плоскости α ,

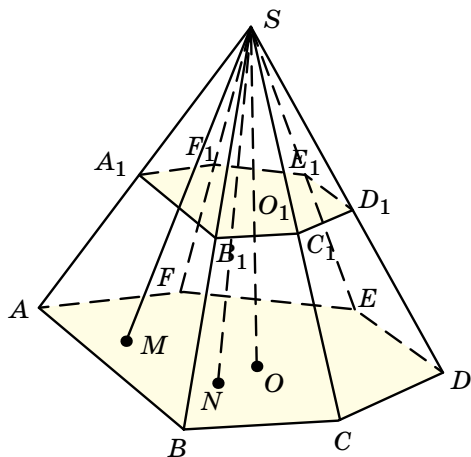


Рис. 4.36

Из теоремы 28 также следует, что основания любой усечённой пирамиды гомотетичны.

а значит, переходит в точку их пересечения (6, 7, свойства гомотетии).

9. С другой стороны, любая точка N_1 , принадлежащая многоугольнику $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ гомотетична точке N , принадлежащей плоскости $AB C D E F$ (6, 7, свойства гомотетии) (рис. 4.37).

10. (5) Многоугольники $AB C D E F$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ гомотетичны (8, 9). ■

Следствие. Площади параллельных сечений пирамиды относятся к площади её основания, как квадраты их расстояний от вершины пирамиды, т.е. $S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1} : S_{AB C D E F} = SO_1^2 : SO^2$.

Доказательство этого следствия проведите самостоятельно.

4.6.2 ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЙ ЦИРКУЛЬ

Для построения отрезков, пропорциональных данным отрезкам, и для деления отрезка на равные части удобно использовать *пропорциональный* (или *делительный*) циркуль (рис. 4.37).

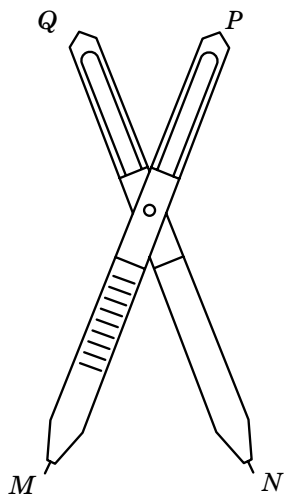


Рис. 4.37

Он состоит из двух ножек одинаковой длины с продольными прорезями для перемещения винта. На одной из его ножек нанесены деления.

1. Если поставить винт так, чтобы $MO : OP = 2$, то при любом растворе циркуля будем иметь равенство $MN : PQ = 2$.

2. Чтобы разделить отрезок AB на две равные части, делают раствор между ножками циркуля M и N равным расстоянию AB .

3. Расстояние PQ будет тогда равно $\frac{1}{2}$ расстояния AB .

Особенно удобно пользоваться пропорциональным циркулем, когда нужно изменить большое число отрезков в одном и том же отношении.

Устройство пропорционального циркуля основано на свойствах подобных треугольников, точки M

и P , а также N и Q являются соответственными в гомотетии с центром в точке O и коэффициентом $MO : OP$.

4.6.3 ПОПЕРЕЧНЫЙ МАСШТАБ

Вспомним, что численным масштабом называют отношение расстояния между двумя любыми точками на чертеже (плане, карте) к расстоянию между соответственными им точками в натуре. Если, например, расстояние на карте между точками A_1 и B_1 равно 1 см, а расстояние между соответственными им точками A и B на местности равно 10 км, то численный масштаб этой карты равен $A_1B_1 : AB = 1 \text{ см} : 1000000 \text{ см} = 1 : 1000000$.

Значит, численный масштаб – это коэффициент подобия участка на местности и его изображения на карте.

Линейный масштаб – это отрезок с нанесёнными на него делениями и надписью, указывающей, какой отрезок соответствует каждому делению в натуре. На рисунке 4.37 изображен линейный масштаб, соответствующий численному масштабу 1:1000000.

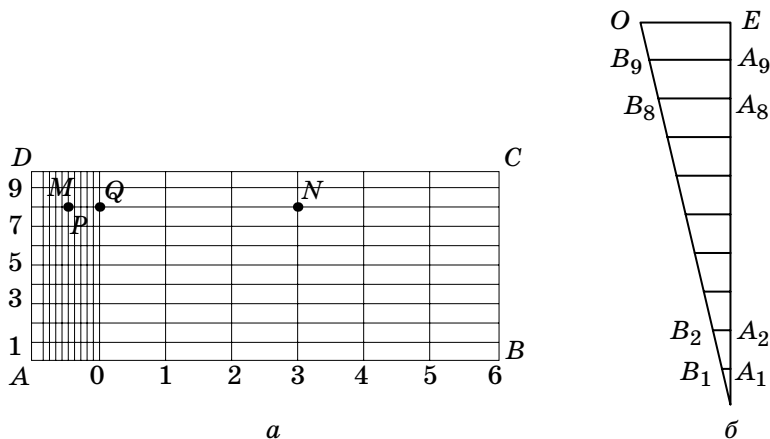


Рис. 4.38

Для определения расстояния между двумя пунктами A и B по карте нужно одну ножку измерительного циркуля поставить в точку A , другую – в B . Затем, не меняя раствора циркуля, следует поставить его ножки так, чтобы одна из них находилась справа от 0 на каком-нибудь крупном делении, а другая – слева от 0 на мелком делении (или в самой точке 0). Тогда по линейному масштабу можно сразу определить расстояние между пунктами A и B в натуре.

Для увеличения точности измерений расстояний по карте (или плану) используют поперечный масштаб.

В линейном масштабе левый крайний отрезок (масштабная единица или основание масштаба) делится на 10 равных частей. Чтобы измерить отрезки с точностью до сотых частей масштабной единицы, строят прямоугольник $ABCD$ (рис. 4.38 а) и на его основании AB наносят линейный масштаб. Боковые стороны прямоугольника делят на 10 равных частей и соединяют точки деления отрезками (они будут параллельными основанию AB). На стороне DC откладывают последовательно масштабную единицу и полученные точки соединяют с соответствующими делениями линейного масштаба AB . Отрезок DE делят на 10 равных частей и обозначают, как на рис. 4.38 а (отметки 0, 1, 2, 3 ... сдвинуты на одну влево по сравнению с соответствующими отметками на отрезке AO). Точки отрезков DE и AO с одинаковыми отметками соединяют отрезками.

Поперечный масштаб готов.

Рассмотрим теперь треугольник OEo , изобразив его для удобства отдельно (рис. 4.38 б). Параллельные прямые отсекают от него подобные треугольники. Из подобия треугольников следует, что $A_1B_1 : OE = 1 : 10$, $A_2B_2 : OE = 2 : 10$, $A_3B_3 : OE = 3 : 10$, ..., $A_9B_9 : OE = 9 : 10$.

Следовательно, A_1B_1 равен 0,01 масштабной единицы, A_2B_2 – 0,02 масштабной единицы и т.д.

Используют поперечный масштаб следующим образом. Циркуль, перенесённый с карты, накладывают так, чтобы острия обеих ножек находились на одной горизонтали, причём одно острие – в точке пересечения горизонтали с вертикалью (на рис. 4.38а в точке N , а другое – в точке пересечения горизонтали с наклонной (в точке M). Получили: $NM = NQ + QP + PM$. Но $NQ = 3$, $QP = 0,08$, $PM = 0,4$.

Следовательно, $NM = 3,48$ масштабной единицы.

4.6.4 МЕНЗУЛЬНАЯ СЪЁМКА ПЛАНА ЗЕМЕЛЬНОГО УЧАСТКА

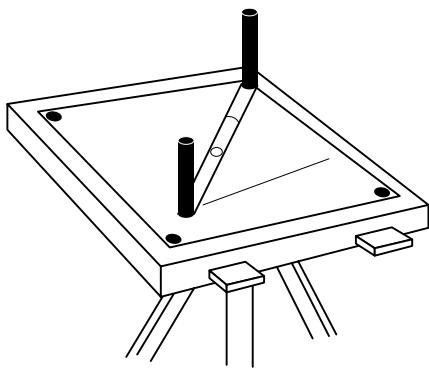


Рис. 4.39

Мензула представляет собой квадратную доску (планшет), помещённую на штативе (рис. 4.39).

На планшет кнопками прикрепляется лист бумаги. Если нужно снять план земельного участка, имеющего форму многоугольника (рис. 4.40), то внутри его выбирают точку O , из которой видны все вершины этого многоугольника. Над точкой O устанавливают мензулу так, чтобы мензульная доска была в горизонтальном положении (с помощью уровней). Далее, на планшете отмечают точку O_1 , соответствующую выбранной точке O на местности.

С помощью *алиады* или *трёхгранной масштабной линейки* из точки O_1 проводят лучи в направлениях на веши, поставленные в вершинах многоугольника, план которого снимается. Измерив расстояние от точки O до вершин многоугольника, откладывают их в выбранном масштабе на соответствующих лучах, вычерченных на планшете. Получаются точки A_1, B_1, C_1, D_1 (рис. 4.40), соответствующий вершинам A, B, C, D данного на местности многоугольника. Многоугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ подобны. Коэффициент подобия равен выбранному масштабу.

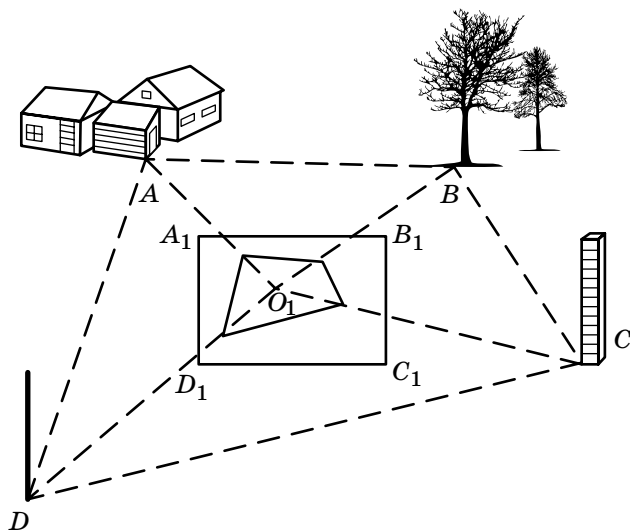


Рис. 4.40

Этот способ мензульной съемки называется *полярным*.

4.6.5 ПАНТОНОГРАФ

Для построения фигуры, гомотетичной данной, служит прибор *пантонограф* (рис.4.41).

1. Возьмём параллелограмм $ABCD$ (рис.4.42), сторонами которого служат металлические стержни, скреплённые шарнирно.

2. На продолжении стержня BC в точке E закрепим острый карандаш.

3. В точке F пересечения AE и CD на стержне CD укрепим иглу с тупым концом.

4. Будем изменять положение нашего шарнирного параллелограмма $ABCD$, не меняя положения вершины A .

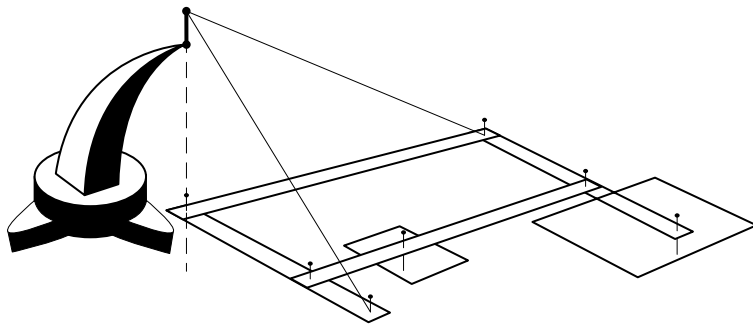


Рис. 4.41

Нам нужно доказать, что точки A , F и E будут оставаться на одной прямой.

5. Пусть $A_1B_1C_1D_1$ – новое положение параллелограмма $ABCD$.

6. $\triangle ABE \sim \triangle FCE$ (вывод обоснуйте).

7. $AB : CF = BE : CE = AE : FE$ (6).

8. $\triangle AB_1E_1 \sim \triangle F_1C_1E_1$ (вывод обоснуйте).

9. $A_1B_1 : C_1F_1 = B_1E_1 : C_1E_1 = AE_1 : F_1E_1$ (8).

10. $B_1E_1 = BE$, $C_1E_1 = CE$, $AB_1 = AB$ (1, 5).

11. Из п.9 получаем: $AB : C_1E_1 = BE : CE$.

12. Сравнивая п. 11 с п. 7, заключаем, что точка F_1 является новым положением точки E и, значит, точки A , F , E при изменении положения $ABCD$ остаются на одной прямой.

13. Из п. 7 и п.9, учитывая п. 10, находим, что $AE_1 : F_1E_1 = AE : FE$, откуда $AE_1 : AF_1 = AE : AF$.

14. Точкам F и F_1 соответствуют при гомотетии с центром A точки E и E_1 . Коэффициентом этой гомотетии является отношение $BE : EC$ (13).

Если остриём иглы обводить контур некоторой фигуры, то остриё карандаша нарисует контур фигуры, гомотетичной данной.

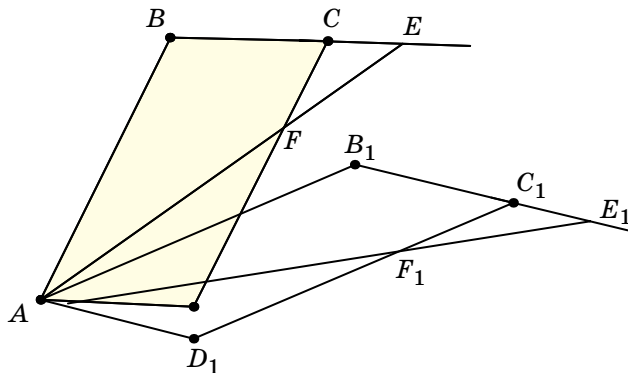


Рис. 4.42

ЗАДАЧИ К §§ 4.1–4.2

Н



- 1 Сколько параллельных переносов задают всевозможные упорядоченные пары точек, составленные из вершин: а) треугольника; б) параллелограмма; в) треугольной пирамиды; г) параллелепипеда?
- 2 Сколько различных векторов изображено на рисунке 4.3?
- 3 Точка O – центр параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Назовите векторы, равные вектору: а) $\overrightarrow{AB}$, б) $\overrightarrow{CC_1}$, в) $\overrightarrow{AD_1}$, г) $\overrightarrow{OD_1}$, д) $\overrightarrow{OB}$.
- 4 В черчении направленными отрезками (прямолинейными стрелками) обозначают радиусы окружностей и дуг. Изображают ли такие направленные отрезки векторы?
- 5 Точки A, B, C, D, E, F – вершины заданного в пространстве правильного шестиугольника. Задайте с их помощью пару векторов: а) равных; б) противоположно направленных; в) сонаправленных, но не равных.
- 6 Точка B – середина отрезка AC , а точка C – середина отрезка BD . Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$?

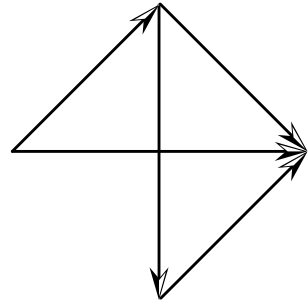


Рис. 4.43

Н

- 7 На рис. 4.44 изображены равнобедренная трапеция $ABCD$ и правильный треугольник CBM . Из точек A, B, C, D, M составьте две различные упорядоченные пары, задающие: а) векторы равной длины; б) сонаправленные векторы; в) противоположно направленные векторы. Есть ли среди всех этих векторов равные?

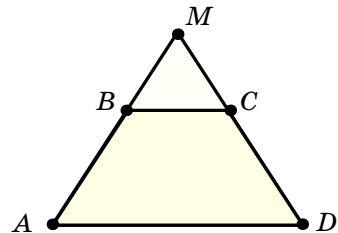


Рис. 4.44

- 8** Дана правильная пирамида $ABCD$. Выполните построения: а) от точки A отложите вектор, равный $\overline{CB}$; б) от точки B отложите вектор, равный $\overline{AC}$; в) от точки D отложите вектор, равный $\overline{AB}$.
- 9** Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Выполните построения: а) от точки B отложите вектор, равный $\overline{CD}$; б) от точки A_1 отложите вектор, равный $\overline{AC}$; в) от точки B отложите вектор, равный $\overline{CC_1}$.
- 10** Даны треугольник ABC и точки M, N . Постройте образ треугольника при параллельном переносе на вектор $\overline{MN}$.

П

- 11** Какой изометрией можно перевести один из двух данных лучей в другой, если эти лучи: а) сонаправлены; б) противоположно направлены?
- 12** Существует ли параллельный перенос, переводящий одну из двух данных плоскостей в другую, если эти плоскости: а) параллельны; б) пересекаются?
- 13** Докажите, что противоположные грани параллелепипеда равны.
- 14** Докажите, что треугольник и его проекция на плоскость равны, если плоскость треугольника параллельна плоскости проекций.
- 15** Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что: а) $\angle BC_1 C = \angle AD_1 D$; б) $\angle CBD_1 = \angle A_1 D_1 B$; в) $\angle ADC = \angle A_1 B_1 C_1$.
- 16** Пусть $ABCD$ – правильная пирамида, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $BD = 5$ см, M, N и K – середины ребер AC, BC и CD соответственно. Найдите длины векторов: а) $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{NM}, \overline{BN}, \overline{NK}$; б) $\overline{CB}, \overline{BA}, \overline{DB}, \overline{NC}, \overline{KN}$.
- 17** Прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ имеет измерения: $AD = 8$ см, $AB = 9$ см, $AA_1 = 12$ см. Найдите длины векторов: а) $\overline{CC_1}, \overline{CB}, \overline{CD}$; б) $\overline{DC_1}, \overline{DB}, \overline{DB_1}$.
- 18** Дана треугольная пирамида $ABCD$. Точки M, N и K – соответственно середины ребер AC, BC и CD (рис. 4.45). Выпишите все пары векторов, которые: а) коллинеарны; б) сонаправлены; в) противоположно направлены.
- 19** На рис. 4.46 изображён куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. а) Укажите на этом рисунке все пары коллинеарных векторов. б) Используя символ $\uparrow\uparrow$, выпишите все пары сонаправленных векторов. в) Используя символ $\uparrow\downarrow$, выпишите все пары противоположно направленных векторов.

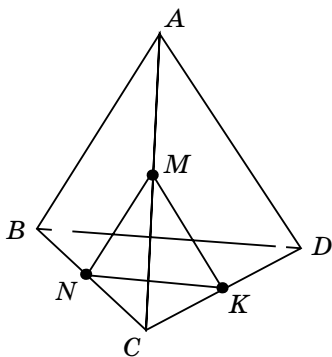


Рис. 4.45

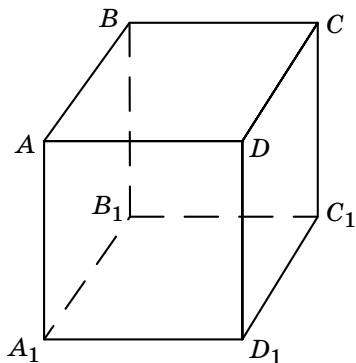


Рис. 4.46

- 20** Установите, справедливы ли утверждения: а) два вектора, коллинеарные ненулевому вектору, коллинеарны между собой; б) два вектора, сонаправленные с ненулевым вектором, сонаправлены; в) два вектора, коллинеарные ненулевому вектору, сонаправлены.
- 21** Установите, справедливы ли утверждения: а) любые два противоположно направленных вектора коллинеарны; б) любые два коллинеарных вектора сонаправлены; в) любые два равных вектора коллинеарны; г) любые два сонаправленных вектора равны; д) если $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$, $\vec{b} \updownarrow \vec{c}$, то $\vec{a} \updownarrow \vec{c}$; е) существуют векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ такие, что $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны, а $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.
- 22** В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и K — середины рёбер $B_1 C_1$ и $A_1 D_1$ соответственно (рис. 4.47). Укажите на этом рисунке все пары: а) сонаправленных векторов; б) противоположно направленных векторов; в) равных векторов.

- 23** В треугольной пирамиде $ABCD$ все рёбра равны. Точки M , N , P и Q — середины рёбер AB , AD , DC , BC соответственно. а) Выпишите все пары равных векторов на полученном рисунке. б) Определите вид четырёхугольника $MNPQ$.

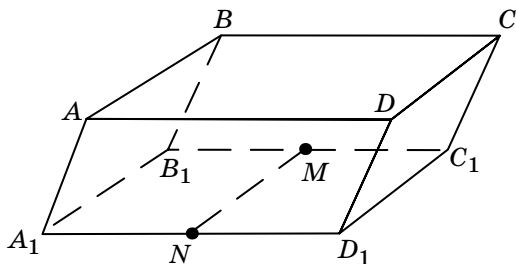


Рис. 4.47

- 24** В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и K — соответственно середины рёбер $B_1 C_1$ и $A_1 D_1$. Укажите векторы, которые получатся, если от-

ложить: а) от точки C вектор, равный $\overline{DD_1}$; б) от точки D вектор, равный $\overline{CM}$; в) от точки D вектор, равный $\overline{AB_1}$.

Н

- 25** В трапеции $ABCD$ основания AD и BC имеют соответственно длины a и b ($a > b$). Постройте направленный отрезок, задающий вектор: 1) $\overline{AD} + \overline{BC}$; 2) $\overline{AD} + \overline{CB}$; 3) $\overline{AB} + \overline{CD}$. Вычислите длину каждого из этих векторов.
- 26** В треугольнике ABC проведена медиана AM . Докажите, что $\overline{AM} + \overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$.
- 27** Докажите, что $\overline{AB} + \overline{DA} = \overline{DB}$.
- 28** Найдите сумму векторов $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$.
- 29** Дана треугольная пирамида $ABCD$. Найдите сумму векторов: 1) $\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DC}$; 2) $\overline{AD} + \overline{CB} + \overline{DC}$; 3) $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{BC} + \overline{DA}$.
- 30** Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите сумму векторов: 1) $\overline{AB} + \overline{BB_1} + \overline{B_1 C_1}$; 2) $\overline{CB} + \overline{B_1 A_1} + \overline{AD_1}$; 3) $\overline{AC_1} + \overline{D_1 A} + \overline{BD_1}$; 4) $\overline{D_1 C} + \overline{AA_1} + \overline{CB} + \overline{CC_1}$.
- 31** Дана треугольная пирамида $ABCD$. От точки A отложите вектор, противоположный вектору: 1) $\overline{DB}$; 2) $\overline{CD}$; 3) $\overline{BC}$.
- 32** Докажите, что если точки O, A, B не принадлежат одной прямой и $\overline{OC} = \overline{OA} - \overline{OB}$, то четырёхугольник $OBAC$ – параллелограмм.
- 33** Докажите, что если в треугольнике ABC угол ACB прямой, то $|\overline{CA} + \overline{CB}| = |\overline{CA} - \overline{CB}|$. Верно ли обратное утверждение?
- 34** Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD}$, где O – произвольная точка пространства.
- 35** а) $ABCD$ – треугольная пирамида. Докажите, что $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{BD} + \overline{AC}$.
б) Верно ли это утверждение для четырёх произвольных точек?
- 36** Найдите сумму векторов (рис.4. 16). 1) $\overline{AD} + \overline{AB}$; 2) $\overline{DC} + \overline{DD_1}$; 3) $\overline{BB_1} + \overline{D_1 D}$; 4) $\overline{BC} + \overline{D_1 A_1}$; 5) $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA_1}$; 6) $\overline{CC_1} + \overline{DA} + \overline{AB}$.

- 37** Упростите векторные выражения (рис. 4.46): 1) $\overline{A_1D_1} + \overline{D_1A} + \overline{B_1C}$; 2) $\overline{AB} + \overline{D_1C_1} + \overline{BB_1} + \overline{B_1A_1} + \overline{BB_1} + \overline{D_1A_1}$; 3) $\overline{A_1B_1} + \overline{A_1D_1} + \overline{C_1B_1} + \overline{C_1D_1} + \overline{A_1C}$; 4) $\overline{D_1C_1} + \overline{BA}$.
- 38** Точки M, N, P, Q, K, T, L, S – вершины куба, причем $\overline{MN} = \overline{QK}$, $\overline{MP} = \overline{QT}$. Выполните чертёж, показывающий возможное расположение точек M, N, P, Q, K, T .
- 39** Дан ненулевой вектор $\overline{OA}$. Отложите от точки O векторы:
- а) $\frac{1}{2} \overline{OA}$; б) $-2 \overline{OA}$; в) $-\frac{2}{3} \overline{OA}$; г) $\sqrt{2} \overline{OA}$; д) $-\sqrt{3} \overline{OA}$.
- 40** O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Найдите x , если: а) $\overline{AB} = x \overline{CD}$; б) $\overline{AC} = x \overline{AO}$; в) $\overline{OB} = x \overline{BD}$; г) $\overline{OC} = x \overline{CD}$.
- 41** На какое число нужно умножить ненулевой вектор $\overline{a}$, чтобы получить вектор $\overline{m}$, удовлетворяющий следующим условиям: 1) $\overline{m} \uparrow \overline{a}$ и $|\overline{m}|=1$; 2) $\overline{m} \downarrow \overline{a}$ и $|\overline{m}|=5$; 3) $\overline{m} \uparrow \overline{a}$ и $|\overline{m}|=b$; 4) $\overline{m} = \overline{0}$.
- 42** В треугольнике ABC медианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке M . Найдите множитель k , если: а) $\overline{A_1C} = k \overline{BC}$; б) $\overline{C_1B} = k \overline{C_1A}$; в) $\overline{AM} = k \overline{MA_1}$; г) $\overline{CC_1} = k \overline{C_1M}$; д) $\overline{MB_1} = k \overline{B_1B}$; е) $\overline{MA} = k \overline{AA_1}$.
- 43** Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, $|\overline{a}| > |\overline{b}|$. Определите направление вектора $\overline{a} + \overline{b}$. Найдите его длину.
- 44** Найдите сумму векторов (рис. 4.46): а) $\frac{1}{2} \overline{A_1B_1} + \frac{1}{2} \overline{AD} + \frac{1}{2} \overline{CC_1}$; б) $\frac{1}{2} \overline{CC_1} + \overline{AB} + \overline{B_1C_1}$; в) $\frac{1}{2} \overline{CD} + \frac{1}{2} \overline{C_1A_1} + \overline{AA_1}$; г) $\overline{B_1D} + \overline{CC_1} + \overline{A_1B_1}$.
- 45** Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Разложите по векторам $\overline{p} = \overline{AB}$, $\overline{q} = \overline{AD}$, $\overline{r} = \overline{AA_1}$ векторы: а) $\overline{AB_1}$; б) $\overline{AC}$; в) $\overline{AM}$, где M – середина отрезка $\overline{DD_1}$; г) $\overline{AN}$, где N – середина отрезка $\overline{CC_1}$; д) $\overline{AP}$, где P – середина отрезка $\overline{BC_1}$; е) $\overline{AQ}$, где точка Q принадлежит отрезку D_1C_1 и $D_1Q: D_1C_1 = 5:11$.
- 46** Треугольник ABC – параллельная проекция треугольника $A_1B_1C_1$ на непересекающую его плоскость. Известно, что $AA_1=a$, $BB_1=b$,

M – середина отрезка B_1C . Разложите вектор $\overline{AM}$ по векторам $\overline{p} = \overline{AA_1}$, $\overline{q} = \overline{AB}$, $\overline{r} = \overline{AC}$.

- 47** Медианы грани ABC треугольной пирамиды $OABC$ пересекаются в точке M . Разложите вектор $\overline{OA}$ по векторам $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OM}$.
- 48** Вне плоскости параллелограмма $ABCD$ взята точка O . Разложите по векторам $\overline{a} = \overline{OA}$, $\overline{b} = \overline{OB}$, $\overline{c} = \overline{OC}$ векторы: а) $\overline{OM}$, где M – точка пересечения прямых AC и BD ; б) $\overline{OD}$; в) $\overline{OK}$, где K – середина отрезка AD .
- 49** В треугольной пирамиде $ABCD$ медиана AA_1 грани ABC делится точкой M в отношении $AM:MA_1=3:7$. Разложите вектор $\overline{DM}$ по векторам $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$.
- 50** Дан треугольник, вершинами которого являются концы трёх рёбер параллелепипеда, выходящих из одной его вершины. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника принадлежит диагонали параллелепипеда, выходящей из той же вершины, и делит эту диагональ в отношении 1:2.

П

В этом разделе задач повышенной трудности мы введём группы задач, связанных с изучением свойств той или иной геометрической фигуры. Эти группы задач будут иметь специальные названия.

Точки, отрезки, прямые, плоскости

- 51** Даны три ненулевых вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, каждые два из которых не коллинеарны. Найдите их сумму, если вектор $\overline{a} + \overline{b}$ коллинеарен вектору $\overline{c}$, а вектор $\overline{b} + \overline{c}$ коллинеарен вектору $\overline{a}$.
- 52** Докажите теорему: чтобы вектор, равный сумме неколлинеарных векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имел направление, совпадающее с направлением биссектрисы угла, направления сторон которого совпадают с направлениями векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, необходимо и достаточно, чтобы $|\overline{a}| = |\overline{b}|$.
- 53** Даны n точек $A_1, A_2, \dots, A_n$. Докажите, что существует единственная точка G , такая, что $\overline{GA_1} + \overline{GA_2} + \dots + \overline{GA_n} = \overline{0}$.

- 54** Даны три параллельных сонаправленных отрезка AA_1 , BB_1 , CC_1 , не лежащих в одной плоскости. Плоскости BCA_1 , CAB_1 , ABC_1 пересекаются в точке M_0 , через которую проведена прямая l , параллельная данным отрезкам и пересекающая плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно в точках M и M_1 . Вычислите $MM_1 = d$, если $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$.
- 55** Докажите, что векторы $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{c} - \vec{a}$, $-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ компланарны.
- 56** а) Докажите, что векторы $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $8\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ компланарны.
б) Разложите каждый из этих векторов по двум остальным.
- 57** На двух скрещивающихся прямых p и q даны по три точки P_1, P_2, P_3 и Q_1, Q_2, Q_3 , причем $\overline{P_1P_2} = k \overline{P_1P_3}$, $\overline{Q_1Q_2} = k \overline{Q_1Q_3}$. Докажите, что прямые P_1Q_1 , P_2Q_2 , P_3Q_3 параллельны некоторой плоскости.
- 58** На одной из двух скрещивающихся прямых даны три точки A_1, A_2, A_3 , а на другой – точки B_1, B_2, B_3 , такие, что $\overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_3} = \overline{B_1B_2} : \overline{B_2B_3} = k$.
Докажите, что $\overline{A_2B_2} = \frac{\overline{A_1B_1} + k \overline{A_3B_3}}{1 + k}$.
- 59** Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ лежат в различных плоскостях. Докажите, что три прямые, проведённые соответственно через середины трёх пар отрезков AB_1 и A_1B , BC_1 и B_1C , CA_1 и AC_1 параллельны некоторой плоскости.
- 60** Докажите, что если противоположные звенья неплоской замкнутой ломаной, состоящей из 6 звеньев, попарно параллельны, то они попарно и равны. Убедитесь в том, что такая ломаная обладает центральной симметрией.

Призма

- 61** Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Докажите, что прямые AM_1 , BN_1 , CP_1 , где M_1, N_1, P_1 – середины сторон B_1C_1 , C_1A_1 , A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$, имеют общую точку.
- 62** На рёбрах AA_1 , BB_1 , CC_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ даны соответственно точки Q и R такие, что $\overline{AQ} = k \overline{AA_1}$, $\overline{BR} = l \overline{BB_1}$, $\overline{CR} = m \overline{CC_1}$. Через вершину A и центр симметрии S грани BB_1C_1C проведена прямая g , пересекающая плоскость PQR в точке M . Вычислите отношение $p = AM:AS$.

- 63** Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Докажите, что не существует плоскости, которой параллельны прямые AB_1 , BC_1 , CA_1 .
- 64** Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Через точку M , принадлежащую прямой AB , и прямые BC_1 и DA_1 проведены плоскости MBC_1 и MDA_1 . Докажите, что эти плоскости пересекают прямую CD_1 в одной и той же точке или параллельны этой прямой.
- 65** Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Через центры симметрии M и N граней AA_1B_1B , AA_1C_1C и точку пересечения P медиан треугольника $A_1B_1C_1$ проведена плоскость, пересекающая прямую AA_1 в точке Q . Докажите, что $AA_1=AQ$.

Треугольная пирамида

- 66** Дана треугольная пирамида $ABCD$. Точки M и N – середины ее рёбер AB и CD . Докажите, что $\overline{MN} = \frac{1}{2} (\overline{AD} + \overline{BC})$.
- 67** Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер треугольной пирамиды пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.
- 68** Дана треугольная пирамида $ABCD$. Точки G_1, G_2, G_3, G_4 – центроиды* её граней. Для вершин второй пирамиды $A_1B_1C_1D_1$ построены соответственно симметричные им точки A_2, B_2, C_2, D_2 относительно указанных ранее центроидов. Докажите, что центроиды G' и G'' треугольных пирамид $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ симметричны относительно центроида G треугольной пирамиды $ABCD$.
- 69** Дана треугольная пирамида $ABCD$. Разложите вектор $\overline{AM}$ по векторам $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, где M – середина медианы BB_1 грани BCD .

ЗАДАЧИ К § 4.3

Н



- 70** Чем отличается операция скалярного произведения векторов от других операций над векторами?
- 71** Что надо знать о векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, чтобы найти их скалярное произведение?

* Центроидом треугольника называется точка пересечения его медиан. Если соединить каждую вершину треугольной пирамиды с центроидом противоположной грани, то полученные четыре отрезка пересекутся в одной точке (докажите!). Эта точка называется центроидом треугольной пирамиды.

Н

- 72** Известно, что скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно 0. Что можно сказать о расположении этих векторов?
- 73** Ненулевые векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ параллельны прямым a и b соответственно. Верно ли утверждение, что угол между векторами равен углу между прямыми)?

Н

- 74** Как записать условие взаимной перпендикулярности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
- 75** Известно, что $\vec{a} = k\vec{b}$, $\vec{c} = k\vec{d}$. Справедливы ли пропорции: а) $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{c}|}{|\vec{d}|}$; б) $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{c}|} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{d}|}$; в) $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{d}|}{|\vec{c}|}$; г) $\frac{|\vec{d}|}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{c}|}{|\vec{a}|}$?
- 76** При каких векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно равенство $\vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}$.
- 77** Справедливо ли равенство $(\vec{AC} \cdot \vec{BD})^2 = \vec{AC}^2 \cdot \vec{BD}^2$?

Н

- 78** 1) Какой знак имеет скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если угол φ между ними находится в промежутке: а) $0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$; б) $90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$? 2) В каком промежутке находится угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$; б) $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$?
- 79** Найдите скалярное произведение векторов: а) $\vec{a}$ и $-\vec{a}$; б) $\vec{b}$ и $k\vec{b}$.
- 80** Выполните действия: $\vec{a}(\vec{a} - 2\vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b})^2$.
- 81** Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, образующих угол φ , если: а) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = 45^\circ$; б) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, $\varphi = 120^\circ$; в) $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 7$, $\varphi = 90^\circ$;

- 82** Упростите: а) $(\bar{a} + \bar{b})^2 - \bar{a}(\bar{a} + 2\bar{b})$; б) $(\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} - \bar{b}) + 3(\bar{a} + 2\bar{b})(\bar{a} - 2\bar{b})$; в) $(\bar{a} - 3\bar{b})^2 + 2\bar{a}(\bar{a} + 3\bar{b})$; г) $\bar{a}(2\bar{a} - 6\bar{b}) + (2\bar{a} + \bar{b})(2\bar{a} - \bar{b}) + (\bar{a} + 3\bar{b})^2$; д) $(3\bar{a} - \bar{b})^2 + 2(2\bar{a} + \bar{b})^2 - (2\bar{a} - \bar{b})(4\bar{a} + 3\bar{b})$.
- 83** Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны. Упростите выражения: а) $(\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} + 2\bar{b}) - 2\bar{b}^2$; б) $(2\bar{a} - 3\bar{b})(\bar{a} + \bar{b}) + 3\bar{b}^2$.
- 84** Докажите, что если $\bar{a} \perp \bar{b}$, то $(\bar{a} + \bar{b})^2 - (\bar{a} - \bar{b})^2 = 0$.
- 85** Какой угол образуют единичные векторы $\bar{s}$ и $\bar{t}$, если известно, что векторы $\bar{s} + 2\bar{t}$ и $5\bar{s} - 4\bar{t}$ взаимно перпендикулярны?
- 86** Вычислите $(3\bar{a} - \bar{b})(2\bar{b} + 2\bar{a})$, если известно, что $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.
- 87** Запишите с помощью векторов следующие утверждения: а) ABC – равнобедренный треугольник с основанием AC ; б) ABC – равносторонний треугольник; в) $ABCD$ – ромб; г) $ABCD$ – прямоугольник; д) $ABCD$ – квадрат.
- 88** Треугольник ABC , у которого $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, вписан в единичную окружность с центром в точке O . Вычислите скалярные произведения: а) $\overline{OB} \cdot \overline{OC}$; б) $\overline{OC} \cdot \overline{OA}$; в) $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$.
- 89** $ABCDEF$ – правильный шестиугольник с центром в точке O и стороной a . Вычислите скалярные произведения: а) $\overline{AB} \cdot \overline{ED}$; б) $\overline{AD} \cdot \overline{CB}$; в) $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$; г) $\overline{OA} \cdot \overline{OC}$; д) $\overline{OA} \cdot \overline{OD}$; е) $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$; ж) $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$.
- 90** Длина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC равна c . Вычислите сумму: $\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{BC} \cdot \overline{BA} + \overline{CA} \cdot \overline{CB}$.
- 91** Дан треугольник ABC . $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Выразите через a, b, c скалярные произведения: а) $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$; б) $\overline{BC} \cdot \overline{BA}$.
- 92** Даны неколлинеарные единичные векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$. Найдите скалярное произведение $(\overline{OA} + \overline{OB}) \cdot (\overline{OA} - \overline{OB})$.
- 93** Для равностороннего треугольника ABC , длина стороны которого равна 2, вычислите значение выражения $\overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BC}$.

- 94** Даны две стороны $AB = a$, $CD = b$ четырехугольника $ABCD$ и угол α между этими сторонами. Найдите длину отрезка, соединяющего середины двух других сторон четырехугольника.
- 95** В треугольнике ABC со сторонами $AB = 5$, $BC = 2$, $AC = 4$ вычислите величину угла ABC .
- 96** Для треугольника ABC выразите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ через длины сторон треугольника.
- 97** В треугольнике ABC со сторонами $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 6$ найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- 98** Докажите, что в равностороннем треугольнике ABC с центром тяжести M выполняется равенство: $AB^2 = 3MC^2$.
- 99** В плоскости прямоугольника $ABCD$ дана точка M . Докажите, что справедливо равенство $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$.
- 100** В треугольнике ABC найдите: а) a , если $b = 10$ см, $c = 16$ см, $\angle A = 60^\circ$; б) b , если $a = 8$ см, $c = 15$ см, $\angle B = 60^\circ$; в) c , если $a = 6$ см, $b = 10$ см, $\angle C = 120^\circ$; г) a , если $b = 14$ мм, $c = 16$ мм, $\angle A = 120^\circ$.
- 101** а) В прямоугольном треугольнике примите катеты за $\bar{a}$ и $\bar{b}$, гипотенузу за $\bar{c}$. Найдите зависимость между $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и докажите, что $c^2 = a^2 + b^2$.
б) Докажите, что в $\triangle ABC$ скалярное произведение $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ можно выразить через длины сторон a , b , c .
- 102** а) В ромбе $OACB$ примите $\overrightarrow{OA} = \bar{a}$, $\overrightarrow{OB} = \bar{b}$. Выразив через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{AB}$, докажите что $OC \perp AB$.
б) Аналогично докажите, что диагонали прямоугольника равны.
- 103** В окружности O проведён диаметр AB и радиус OC . Обозначьте $\overrightarrow{OA} = \bar{r}$, $\overrightarrow{OC} = \bar{r}_1$, выразите через $\bar{r}$ и $\bar{r}_1$ векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ и докажите, что $\angle ACB$ прямой.
- 104** а) В параллелограмме d_1 и d_2 – диагонали, φ – острый угол между ними; a – сторона, обращенная к углу φ , b – другая сторона. Докажите, что $d_1 d_2 \cos \varphi = b^2 - a^2$.
б) В параллелограмме $ABCD$ выразите векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BD}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \bar{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \bar{b}$. Докажите, что сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон.

- 105** а) В прямоугольном треугольнике векторы-катеты $\overline{AB} = \vec{c}$, $\overline{AC} = \vec{b}$. Выразите медиану, проведённую к гипотенузе, через $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и докажете, что она равна половине гипотенузы.
- б) В $\triangle ABC$ CM – медиана. Докажите, что произведение длин стороны AB и проекции медианы CM на прямую AB равно разности квадратов двух других сторон.
- 106** В $\triangle ABC$ стороны равны a, b, c . Докажите, что $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$.
- 107** Дано: $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b})=60^\circ$. Найдите косинус угла между векторами: а) $\vec{a}$ и $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$; в) $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$.
- 108** Точки A_1, A_2, A_3 делят отрезок A_0A_4 на четыре отрезка равной длины. Выбрав точку O вне прямой A_0A_4 , разложите по векторам $\vec{p} = \overline{OA_1}$ и $\vec{q} = \overline{OA_4}$ векторы: 1) $\overline{OA_0}$; 2) $\overline{OA_2}$; 3) $\overline{OA_3}$.
- 109** Для точек A, B, C , не принадлежащих прямой, выполняются равенства: $\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{OC_1}$, $\overline{OB} - \overline{OC} = \overline{OA_1}$, $\overline{OC} - \overline{OA} = \overline{OB_1}$. Докажите, что медианы треугольника $A_1B_1C_1$ пересекаются в точке O .

П

Точки, отрезки, прямые

- 110** Докажите справедливость тождества $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}\right)^2$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
- 111** Докажите, что для любых четырёх точек плоскости A, B, C, D имеет место равенство $\overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$. Запишите это равенство через векторы $\vec{a} = \overline{DA}$, $\vec{b} = \overline{DB}$, $\vec{c} = \overline{DC}$.
- 112** Выясните условия, при которых $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot (\vec{c} \cdot \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{d})$.
- 113** Докажите, что, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ удовлетворяют условию $(\vec{a} - \vec{b})(|\vec{b}| \cdot \vec{a} + |\vec{a}| \cdot \vec{b}) = 0$, то они либо коллинеарны, либо равны их модули.

- 114** Даны три точки A, B, C , для которых $AC^2 + BC^2 = \frac{1}{2} AB^2$. Докажите, что $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{0}$.
- 115** Докажите, что квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.
- 116** Докажите, что для того, чтобы два отрезка AB и CD были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.
- 117** На двух прямых даны соответственно отрезки AB и CD . Точками M и M_1 отрезок AB разделён в отношении $AC:BD$ внутренним и внешним образом. В таком же отношении разделён отрезок CD внутренним и внешним образом точками N и N_1 . Докажите, что отрезки MN и M_1N_1 перпендикулярны.
- 118** Все звенья замкнутой ломаной $ABCD$ равны. Докажите, что $\angle(\overline{AB}, \overline{CD}) = \angle(\overline{BC}, \overline{DA})$.
- 119** Дана замкнутая ломаная $ABCD$, причём $\angle DAB = \angle DCB = 90^\circ$. Докажите, что проекции противоположных звеньев данной ломаной на прямую AC равны.

Треугольники

- 120** В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE, CF . Вычислите сумму $\overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BE} + \overline{AB} \cdot \overline{CF}$.
- 121** Выразите длину каждой медианы треугольника через длины его сторон.
- 122** Дан треугольник ABC , в котором $AC = 3, BC = 4, \angle ACB = 120^\circ$. Найдите расстояние от вершины C до точки M , делящей сторону AB в отношении $1:3$, считая от вершины A .
- 123** Докажите, что если в прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена высота CD , то:
а) $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BD}$; б) $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$; в) $\overline{BC}^2 = \overline{BA} \cdot \overline{BD}$.
- 124** В равнобедренном треугольнике медианы, проведённые к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите величину угла между боковыми сторонами этого треугольника.
- 125** Найдите косинус угла между биссектрисой угла треугольника и противоположащей стороной, если отношение длин двух других сторон треугольника равно 3 , а угол между этими сторонами равен α .

- 126** Докажите, что угол C треугольника ABC будет острым, прямым или тупым, смотря по тому, будет ли длина медианы CD больше, равна или меньше $\frac{1}{2}AB$.
- 127** Докажите, что в треугольнике ABC с центром тяжести M справедливо соотношение $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(MA^2 + MB^2 + MC^2)$.
- 128** Докажите, что если центр тяжести треугольника ABC совпадает с точкой пересечения высот, то треугольник равносторонний.
- 129** Докажите, что если в треугольнике две медианы взаимно перпендикулярны, то сумма их квадратов равна квадрату третьей медианы.
- 130** Найдите зависимость между сторонами треугольника ABC , если его медианы AA_1 и BB_1 перпендикулярны.
- 131** Катеты прямоугольного треугольника равны a и b . Найдите длину биссектрисы, проведенной из вершины прямого угла.
- 132** В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена высота CD . Выразите через векторы $\vec{a} = \vec{CB}$ и $\vec{b} = \vec{CA}$: а) вектор $\vec{AD}$; б) вектор $\vec{CD}$.
- 133** Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC равны. Докажите, что треугольник равнобедренный.
- 134** Точки M и N делят сторону AB треугольника ABC на равные отрезки. Докажите, что если $|CM| = |CN|$, то $|CA| = |CB|$.
- 135** Докажите, что если AM – биссектриса треугольника ABC , то $AM = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$, где $b = AC$, $c = AB$.
- 136** Докажите, что три прямые, на которых лежат высоты треугольника, пересекаются в одной точке.
- 137** Найдите углы между диагональю куба и диагоналями какой-либо его грани.
- 138** Даны два прямоугольных треугольника AOB и COD . $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$, причем $AC \cap BD = M$, $AD \cap BC = N$. Докажите, что треугольник MON также прямоугольный.
- 139** Дан треугольник ABC , в котором проведены медианы AA_1 , BB_1 , CC_1 . Докажите, что $\operatorname{ctg} \angle BC_1C + \operatorname{ctg} \angle CA_1A + \operatorname{ctg} \angle AB_1B = 0$.

- 140** Дан треугольник ABC , в котором проведены медианы AA_1 , BB_1 , CC_1 . Докажите, что $\operatorname{ctg}\angle BCC_1 + \operatorname{ctg}\angle CAA_1 + \operatorname{ctg}\angle ABB_1 = \operatorname{ctg}\angle ACC_1 + \operatorname{ctg}\angle BAA_1 + \operatorname{ctg}\angle CBB_1$.
- 141** Докажите, что для всякого треугольника ABC имеет место равенство $\operatorname{ctg}\angle A + \operatorname{ctg}\angle B + \operatorname{ctg}\angle C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4s}$, где $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, s – площадь треугольника.
- 142** Даны правильный треугольник ABC и в его плоскости произвольная точка M . Построены проекции отрезков MA , MB , MC соответственно на прямые BC , CA , AB . Докажите, что сумма двух из этих проекций равна третьей.
- 143** На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка D , удовлетворяющая условию $BD:DA = 3:1$. Выразите длину отрезка CD через длины катетов $CB = a$ и $CA = b$.
- 144** В треугольнике ABC длины сторон связаны соотношением $a^2 + b^2 = 5c^2$. Докажите, что медианы, проведенные к сторонам AC и BC , взаимно перпендикулярны.
- 145** Найдите косинус угла, образованного биссектрисой угла треугольника с противолежащей стороной, если отношение длин двух других сторон треугольника равно 3, а величина угла между этими сторонами равна α .

Окружность, круг

- 146** В окружность с центром O вписан треугольник ABC . Выразите вектор $\overrightarrow{OC_1}$ через векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, где C_1 – основание высоты, проведенной из вершины C .
- 147** Вокруг правильного n -угольника $A_1A_2\dots A_n$ описана окружность радиуса R . Докажите, что для любой точки M окружности $MA_1^2 + MA_2^2 + \dots + MA_n^2 = 2nR^2$.
- 148** В окружность радиуса R вписаны два правильных шестиугольника. Вычислите сумму квадратов расстояний от вершин одного шестиугольника до вершин другого.
- 149** Две равные окружности касаются в точке M . Докажите, что если MX и MY – перпендикулярные хорды данных окружностей, то окружность, описанная вокруг треугольника MXY , равна данным.
- 150** Докажите, что скалярное произведение двух векторов, отложенных от данной точки до концов любого диаметра данной окружности, есть величина постоянная.

- 151** В окружность с центром O и радиусом R вписан треугольник ABC . Найти разложение вектора $\overrightarrow{OC}$ по $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ (коэффициенты разложения выразить через основные элементы треугольника).
- 152** В треугольник ABC вписана окружность с центром I . Найдите разложение вектора $\overrightarrow{IC}$ по $\overrightarrow{IA}$ и $\overrightarrow{IB}$.

Применения скалярного произведения векторов в пространстве

Н

- 153** Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между векторами и угол между прямыми, определяемыми теми же парами точек, что и векторы: а) $\overrightarrow{D_1 A_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{C_1 B}$ и $\overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{D C_1}$ и $\overrightarrow{A_1 B}$; г) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{D C_1}$; д) $\overrightarrow{DA_1}$ и $\overrightarrow{B_1 B}$.
- 154** 1. Три силы, приложенные к одной точке, образуют попарно углы, равные φ . Найдите величину равнодействующей силы, если величина каждой из данных сил равна F .
2. Найдите равнодействующую трех сил по 10 Н каждая, если эти силы приложены к одной точке и углы между силами равны 90° , 60° , 60° .
- 155** Груз равномерно перемещают по горизонтальной плоскости с помощью двух канатов, один из которых образует угол 15° , а другой – 20° с направлением движения. Сила натяжения каждого каната равна 50 кН. Какая работа будет совершена при перемещении груза на 100 м? (Трением пренебрегаем).
- 156** Четыре точки A, B, C, D некомпланарны, прямые AB и BC , AB и BD попарно перпендикулярны. Докажите, что прямые AB и CD тоже перпендикулярны.
- 157** Через вершину A ромба $ABCD$ проведена прямая, перпендикулярная сторонам AB и AD , и на ней взята точка E .
а) Докажите, что прямая EC перпендикулярна прямой BD .
б) Найдите расстояние EM , если $AD = 2$, $AE = 3$, $\angle BAD = 60^\circ$ и M – середина DC .
- 158** Через вершину A равнобедренного треугольника ABC проходит прямая AD , некомпланарная с ним. Найдите достаточное и необходимое условия для перпендикулярности прямых AD и BC .

- 159** Точка O – центр правильного треугольника ABC , точка M не принадлежит треугольнику ABC и равноудалена от всех его вершин.
 а) Докажите, что $MO \perp AB$.
 б) Найдите MO , если $MA = 3$, $\angle AMB = 90^\circ$.
- 160** Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Перпендикулярны ли прямые: а) AB и AD_1 ; б) $B_1 D$ и AC ; в) $C_1 D$ и BC ; г) DC и KM , где K – середина ребра $A_1 B_1$, M – середина ребра DC ; д) KM и AD ?
- 161** Из вершин квадрата $ABCD$ со стороны a проведены сонаправленные лучи и на них отложены отрезки $AA_1 = BB_1 = AB$, $CC_1 = DD_1 = AB$, причем $\angle A_1 AB = 60^\circ$, $\angle B_1 BC = 90^\circ$. Найдите: а) AC_1 ; б) DB_1 ; в) $A_1 B_1$; г) $B_1 D_1$.

Точки, прямые, плоскости

П

- 162** Даны три точки A, B, C , не принадлежащие одной прямой. Выразите расстояние d от точки O до плоскости ABC через векторы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.
- 163** Даны две прямые AB и CD . Отрезки AB и CD разделены точками M и N на части, пропорциональные AC и BD ($AC \neq BD$). Эти же отрезки разделены точками M_1 и N_1 внешним образом в таком же отношении. Докажите, что отрезки MN и $M_1 N_1$ перпендикулярны.
- 164** Даны три некопланарных вектора $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$. Вычислите угол ϕ между лучом OC и плоскостью AOB , если $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$.
- 165** Даны три некопланарных вектора $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, среди которых нет перпендикулярных. Для каждого из них построен компланарный с ними вектор, перпендикулярный к третьему. Докажите, что построенные векторы P_1, P_2, P_3 компланарны.
- 166** Даны две перпендикулярные скрещивающиеся прямые p и q . $p: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \alpha \overrightarrow{a}$, $q: \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \beta \overrightarrow{b}$, $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = 1$. Построен их общий перпендикуляр MN . Найдите разложение вектора $\overrightarrow{MN}$ по векторам $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{AB}$.
- 167** Для данной неплоской замкнутой ломаной, состоящей из шести звеньев, построены два треугольника, вершинами каждого из которых служат

середины несмежных звеньев. Докажите, что точки пересечения медиан этих треугольников совпадают.

- 168** Докажите, что при произвольном выборе точки O равенство $\overline{OC} = k\overline{OA} + (1-k)\overline{OB}$ является необходимым и достаточным условием принадлежности различных точек A, B, C одной прямой.
- 169** В окружность радиусом R вписан треугольник ABC . Вычислите расстояние от центра O окружности до вершины D параллелограмма $ABCD$ по заданным длинам сторон треугольника.
- 170** Стороны параллелограмма разделены по его обходу в равных отношениях. Докажите, что точки деления служат вершинами параллелограмма, а центры симметрии этих параллелограммов совпадают.
- 171** Дана неплоская замкнутая ломаная $ABCD A$, у которой $AD = a$, $BC = b$, $\angle(\overline{AD}, \overline{BC}) = \varphi$. Найдите расстояние: а) между серединами звеньев AB и CD ; б) между серединами отрезков AC и BD .

Многогранные углы

- 172** Дан правильный четырехгранный угол с плоским углом α . Вычислите угол β его диагонального сечения.
- 173** Даны четыре луча с общим началом. Из шести углов, образованных попарно этими лучами, пять углов равны 60° каждый. Вычислите шестой угол.
- 174** По заданным плоским углам трехгранного угла вычислите его двугранные углы (теорема косинусов для трехгранного угла).
- 175** Выразите через плоские углы α, β, γ трехгранного угла косинус угла между его ребром и биссектрисой противоположащего плоского угла.
- 176** Докажите, что если биссектрисы двух плоских углов трехгранного угла перпендикулярны, то биссектриса третьего плоского угла перпендикулярна к каждой из первых двух биссектрис.
- 177** Ребра прямого трехгранного угла с вершиной O пересечены плоскостью в точках A, B, C . Докажите, что треугольник ABC остроугольный.
- 178** Известны плоские углы α, β, γ трёхгранного угла $Oabc$. Вычислите косинус угла между ребром с трёхгранного угла и биссектрисой противоположного плоского угла.
- 179** Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите истинность соотношения: $AC_1^2 = AA_1^2 + AC^2 + AD_1^2 - AB^2 - AD^2 - AA_1^2$, т.е. если вершину параллелепипеда соединить отрезками с остальными его вершинами, то

получим 7 отрезков (диагональ параллелепипеда, 3 диагонали граней, 3 ребра), из которых сумма квадратов диагоналей граней без суммы квадратов рёбер равна квадрату диагонали параллелепипеда.

Пирамида

- 180** Выразите расстояние между серединами двух противоположных ребер треугольной пирамиды $ABCD$ через длины всех шести ее ребер.
- 181** Докажите, что если центростроид треугольной пирамиды совпадает с центром описанной вокруг него сферы, то противоположные рёбра пирамиды попарно равны.
- 182** Докажите, что если противоположные ребра треугольной пирамиды $ABCD$ попарно равны, то прямые, проходящие через середины противоположных ее ребер, попарно перпендикулярны.
- 183** Выразите косинус угла между двумя противоположными ребрами треугольной пирамиды через длины всех ее ребер.
- 184** Выразите расстояние от вершины треугольной пирамиды до центростроида противоположащей грани через длины всех ребер пирамиды.
- 185** Даны две треугольные пирамиды $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что если $AB \perp C_1D_1$, $AC \perp B_1D_1$, $AD \perp B_1C_1$, $BC \perp A_1D_1$, $CD \perp A_1B_1$, то $DB \perp A_1C_1$.
- 186** Докажите, что если высоты треугольной пирамиды $ABCD$ пересекаются в одной точке, то плоские углы при каждой вершине трехгранного угла пирамиды одноименные, причем среди граней пирамиды одна или же все четыре – остроугольные треугольники.
- 187** У треугольной пирамиды $ABCD$ ребра AC и BD равны. Докажите, что проекции ребер AB и CD на прямую, проходящую через середины AB и CD равны.
- 188** Докажите, что для любой треугольной пирамиды $ABCD$ имеет место неравенство $BC^2 + CA^2 + AB^2 \leq 4R^2 + DA^2 + DB^2 + DC^2$, где R – радиус сферы, описанной вокруг пирамиды.
- 189** Вокруг прямоугольной пирамиды $OABC$ с прямым трёхгранным углом O описана сфера с центром в точке M . Прямая, проведенная через вершину O перпендикулярно к грани ABC , пересекает ее в точке P , а сферу – вторично в точке Q . Докажите, что $OQ = 3OP$.
- 190** Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин правильной треугольной пирамиды $ABCD$ до прямой l , проходящей через её центростроид M , не зависит от положения прямой l .

- 191** Дана треугольная пирамида $ABCD$, у которой $AB = BC = CA = DA = 1$, $DB = DC = \sqrt{2}$. Вычислите отношения, в которых основания общего перпендикуляра рёбер AB и CD делят эти ребра.

Сфера

- 192** Докажите, что все прямые, касающиеся сферы в данной точке, лежат в одной плоскости.
- 193** Известны длины рёбер треугольной пирамиды $ABCD$ и радиус сферы R , описанной около неё. Вычислите расстояние от центра O сферы до точки пересечения отрезков, соединяющих вершины пирамиды с точками пересечения медиан противоположных граней.
- 194** Дана сфера $(O; R)$, обозначим ее s , и точка X , не принадлежащая сфере s . Через точку X проведена прямая l , пересекающая s в точках A и B . Докажите, что $XA \cdot XB = OX^2 - R^2$.
- 195** На сфере $d(O; R)$ даны две точки A и B . Через точку X проведены прямые AX и BX , пересекающие сферу вторично в точках A_1 и B_1 , причем $\overline{AX} = k \overline{XA_1}$, $\overline{BX} = l \overline{XB_1}$. Найдите множество точек X , для которых $k + l = -2$.
- 196** Даны сфера $d_1(O_1; R_1)$ и сфера $d_2(O_2; R_2)$. Найдите множество точек X пространства, для которых $XT_1 : XT_2 = k$, $k \neq 0$, где XT_1 – касательное расстояние от X до s_1 , а XT_2 – касательное расстояние от X до s_2 . (Касательное расстояние от точки до сферы есть расстояние от этой точки до точки касания касательной, проведенной к сфере через данную точку.)

ГЛАВА 5

ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ В ГЕОМЕТРИИ

Признаюсь, я родился с таким умом, что главное удовольствие при научных занятиях для меня заключалось не в том, что я выслушивал чужие мнения, а в том, что я всегда стремился создать свои собственные.

Рене Декарт
(французский философ и математик, 1596–1650)

Хотя идеи, на которых основан метод аналитической геометрии, детски просты, тем не менее этот метод настолько мощен, что применяя его, рядовые семнадцатилетние мальчики могут решать задачи, которые поставили бы в тупик величайших из греческих геометров – Евклида, Архимеда и Аполлония.

Эрик Темпл Белл
(американский математик, 1883–1960)



ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

В курсе алгебры вам постоянно приходится пользоваться прямоугольной системой координат.

5.1.1 КООРДИНАТЫ НА ПРЯМОЙ

Начнём с рассмотрения *системы координат на прямой*. Впервые вы встретились с такими координатами в курсе математики 6 класса.

Хорошей иллюстрацией этой системы является термометр. Пусть некоторой точке прямой ставится в соответствие число 0; положительные целые числа 1, 2, 3, ... располагаются на равных расстояниях друг от друга с одной стороны от 0, отрицательные целые числа $-1, -2, -3, \dots$ с противоположной стороны, а дробные числа соответственно вставляются между ними. Смещение точки x_1 относительно другой точки x есть положительное или отрицательное число $x_1 - x$. Если на прямой введена система координат, то каждой точке P соответствует некоторое число x , а каждому числу x соответствует некоторая точка P (рис. 5.1).

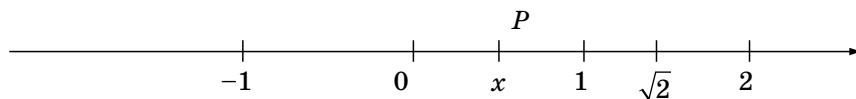


Рис. 5.1

Стрелка показывает положительное направление. Прямая с установленной на ней системой координат называется *координатной прямой*. Точка O называется *началом координат*. Кроме этого, на координатной прямой вводится *единичный отрезок* OE , его иногда называют *масштабом*.

5.1.2 ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Положение точки на плоскости может быть определено её расстояниями до двух фиксированных взаимно перпендикулярных прямых – осей.

В этом случае каждой точке плоскости будет соответствовать не одно число, а пара чисел. Соответствие между точками и парами чисел задается так. Выберем сначала на плоскости прямую, которую обозначим через Ox и введём на ней систему координат. Эта прямая будет называться *осью Ox* . На оси Ox рисуют стрелку, чтобы указать её положительное направление. Эта ось называется также *осью абсцисс*.

Проведем прямую Oy , перпендикулярную оси Ox и проходящую через точку O прямой Ox , имеющую координату 0. Введём на прямой Oy систему координат таким образом, чтобы точка с координатой 0 совпадала с точкой O . Прямая Oy будет называться *осью Oy* , или *осью ординат*. Положительное направление на оси Oy также укажем стрелкой. Точка O пересечения прямых Ox и Oy (осей координат) называется *началом координат* (рис. 5.2).

На рис. 5.3 изображена построенная прямоугольная система координат. Как каждую точку плоскости можно охарактеризовать некоторой парой чисел? Если дана точка P , то мы опустим из неё перпендикуляр на ось Ox . Пусть основанием перпендикуляра будет точка M и x – координата точки M на прямой Ox (рис. 5.3). Тогда число x называется *абсциссой* точки P . На рис. 5.3 $x = 2\frac{1}{2}$.

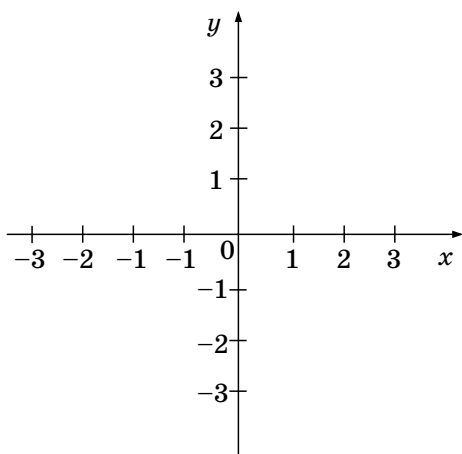


Рис. 5.2.

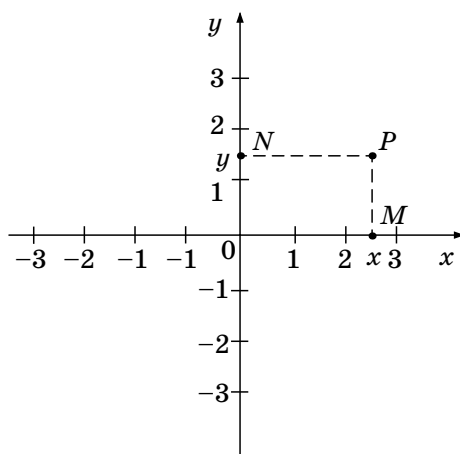


Рис. 5.3.

Затем опустим из точки P перпендикуляр на ось Oy . Пусть основанием этого перпендикуляра будет точка N и y – координата точки N на прямой Oy (рис. 5.3). Тогда число y называется *ординатой* точки P . На рисунке 5.3 $y = 1\frac{1}{2}$. Для краткости мы указываем, что точка P имеет координаты x и y так: $P(x; y)$. В нашем случае $P\left(2\frac{1}{2}; 1\frac{1}{2}\right)$.

Порядок, в котором записываются координаты точки, очень существен. Координаты $(1; 3)$ имеет точка P_1 , а координаты $(3; 1)$ – отличная от неё точка P_2 (рис. 5.4). Вы не можете сказать, где находится точка, если не знаете, какое число в паре чисел (x, y) стоит первым, а какое – вторым.

Можно дать следующее определение координатам точки на плоскости:

Определение 44. Абсциссой точки P называется координата основания перпендикуляра, опущенного из точки P на ось Ox ; ординатой точки P называется координата основания перпендикуляра, опущенного из точки P на ось Oy .

Мы знаем, что прямая разбивает плоскости на две полуплоскости, две оси координат разбивают плоскость на четыре части, называемые *четвертями*, или *квадрантами*. Четыре четверти нумеруются в порядке, указанном на рис. 5.5.

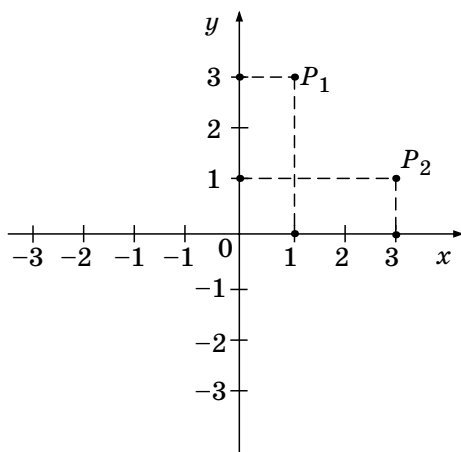


Рис. 5.4

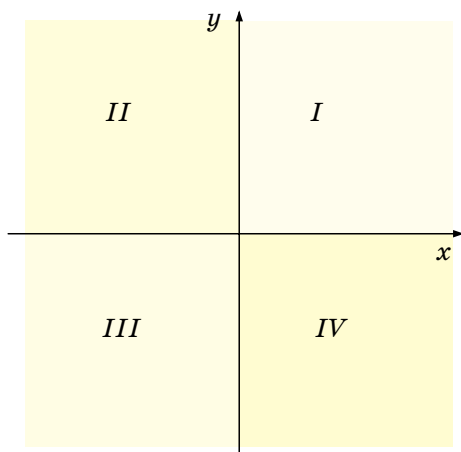


Рис. 5.5.

Из всего вышесказанного ясно, что у каждой точки P на плоскости есть две координаты.



Каждая ли упорядоченная пара $(a; b)$ действительных чисел определяет некоторую точку плоскости?

Легко видеть, что ответ здесь будет положительным.

Восстановим перпендикуляр в точке оси x , имеющей координату $x = a$. Сделаем то же самое в точке оси y , имеющей координату $y = b$. Тогда точка пересечения этих перпендикуляров A будет иметь координаты $(a; b)$ (рис. 5.6).

Таким образом, между точками плоскости и упорядоченными парами действительных чисел мы имеем *взаимно однозначное соответствие*. Такое соответствие называется *прямоугольной системой координат*.

Сделаем два важных замечания по поводу введения прямоугольной системы координат.

1. На осях координат мы выбираем соответствующий масштаб: длину единичного отрезка. Масштаб мы выбираем сами, но необходимо указать какой выбор мы сделали.

На уроках алгебры вы не раз встречали графики, где масштабы в горизонтальном и вертикальном направлении были выбраны по-разному.

Например, если мы захотим начертить график, показывающий рост цены на зерно (в тысячах рублей за тонну) за период от 2008 г. до 2013 гг., то масштабы на горизонтальной и вертикальной осях могут быть различными, т.к. они обозначают совершенно разные величины.

В геометрии мы применяем систему координат для решения геометрических задач. В этих случаях, если масштабы на осях различны, рисунок получается искажённым. Дело в том, что здесь оба масштаба используются для измерения расстояний.

Так, на рис. 5.7 мы выбрали на осях Ox и Oy разные масштабы. Цифры указывают, что $PQ = 2$ и $PR = 2$. Следовательно, $\triangle PQR$ должен быть равнобедренным. Но он, конечно, не выглядит равнобедренным, а отрезки PQ и PR вовсе не кажутся равными. Это значит, что рисунок мы исказили. Чтобы избежать таких искажений, мы будем почти всегда при решении геометрических задач на каждой оси брать один и тот же масштаб.

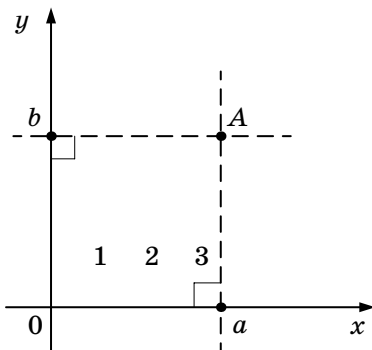


Рис. 5.6.

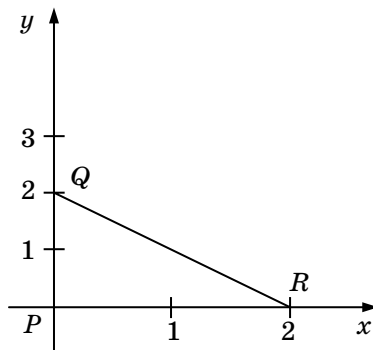


Рис. 5.7.

2. Мы привыкли, что ось Ox – горизонтальная, а ось Oy – вертикальная. Заметим, что мы можем провести оси на листе бумаги в любом положении, например, так, как показано на рис. 5.8.

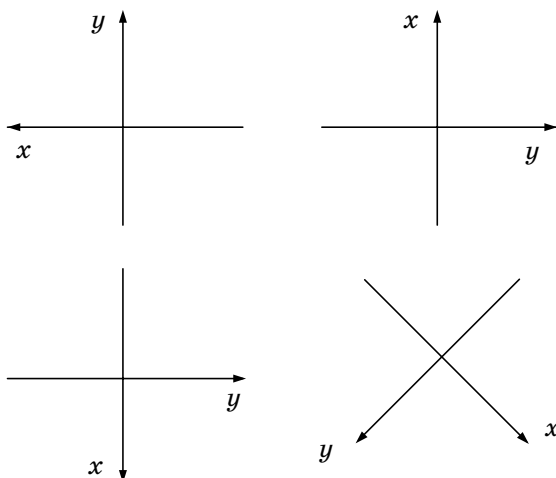
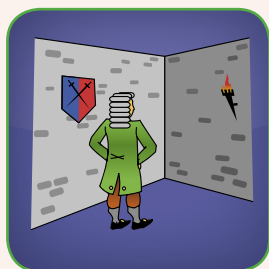


Рис. 5.8

Ни в одном из этих рисунков нет логической ошибки. Однако гораздо легче научиться использовать прямоугольную систему координат, если с самого начала условиться проводить ось Ox горизонтально, так, чтобы координаты возрастали слева направо, а ось Oy – вертикально, так, чтобы координаты возрастали снизу вверх.

§ 5.2*



РЕНЕ ДЕКАРТ И ЕГО СИСТЕМА КООРДИНАТ



Идеи, связанные с введением на плоскости прямоугольной системы координат, встречаются уже у Архимеда Сиракузского и Апполония Пергского, живших более двух тысяч лет назад, и даже у древних египтян. В IV веке

французский математик Н. Орсем так ввёл систему координат на плоскости: он предложил покрыть плоскость прямоугольной сеткой и называть шириной и длиной то, что теперь мы называем абсциссой и ординатой.

В 1637 г. в голландском городе Лейдене в типографии Жана Мэре появилась на свет книга с длинным по обычаю своего времени названием: «Рассуждение о методе, позволяющем направлять разум и отыскивать истину в науках. Кроме того, Диоптрика, Метеоры и Геометрия, которые являются приложениями этого метода». Автора этой книги звали Рене Декарт.

Ему шел тогда сорок второй год, и он по праву считался одним из крупнейших в Европе математиков; однако «Рассуждение о методе» было его первым печатным трудом. Впереди у него были ещё тринадцать лет жизни, удивительные сочинения, но даже одной небольшой части первого печатного труда – геометрии – оказалось достаточно, чтобы навсегда обессмертить его имя. Вместе с «Геометрией» Декарта в науку вошел метод координат.

Декарт знаменит в двух разных областях: среди философов он известен как великий философ, а среди математиков – как великий математик.

Декарт родился в 1596 г. в провинции Турень на юге Франции в семье, принадлежащей знатному, но обедневшему роду. В 1597 г. умерла его мать. Когда Рене исполнилось восемь лет, отец отправил его в коллеж г. Ла-Флеш, незадолго до этого открытый орденом иезуитов для просвещения привилегированного дворянства.

В течение первых пяти лет в коллеже преподавали латинский и греческий языки, историю, литературу, а затем в течение трёх лет – философию, логику, математику и физику. Вспоминая годы учёбы, Декарт в «Рассуждении о методе» писал: «Я изучал там всё, что изучали другие, и, не довольствуясь преподаваемыми сведениями, пробегал все попадавшие мне под руки книги, трактовавшие о наиболее редкостных и любопытнейших науках... Особенно нравилась мне математика верностью и очевидностью своих рассуждений».



В «Рассуждении о методе» Декарт сформулировал «главные правила метода» и отметил: «Я принял твёрдое решение постоянно соблюдать их без единого отступления». Вот эти правила.

Первое: не принимать за истинное что бы то ни было, прежде чем не признал это несомненно истинным, т.е. старательно избегать поспешности и предубеждения и включать в свои суждения только то, что представляется моему уму так ясно и отчётливо, что никоим образом не может дать повод к сомнению.

Второе: делить каждую из рассматриваемых мною трудностей на столько частей, на сколько потребуется, чтобы лучше их разрешить.

Третье: руководить ходом своих мыслей, начиная с предметов простейших и легко познаваемых, и восходить мало-помалу, как по ступеням, до познания наиболее сложных, допуская существование порядка даже среди тех, которые в естественном порядке вещей не предшествуют друг другу.

И последнее: делать всюду настолько полные перечни и такие общие обзоры, чтобы быть уверенным, что ничего не пропущено.

Декарт подчёркивал, что в основе научной теории должны лежать ясные и простые принципы. Необходимо изучать, описывать, классифицировать явления природы, проводить эксперименты и математические расчёты. Изучая природу, нужно полагаться лишь на свои силы, а не ждать помощи свыше, божественного откровения.

Самым большим его вкладом в математику было открытие системы координат и аналитической геометрии. Со времен Декарта алгебра и геометрия стали сотрудни-

чать между собой к выгоде обеих дисциплин. До наших дней та система координат, которую мы сейчас ввели, называется *декартовой системой координат* в честь её создателя.

Честь открытия системы координат с Декартом делит Пьер Ферма (1601–1665), пришедший почти к тем же самым идеям и почти в то же время. Ферма — один из нескольких великих математиков-любителей. Он был государственным служащим и занимался математикой в свободное время. О своих открытиях он сообщал в письмах своим друзьям и никогда не публиковал их в другой форме. Но многое из того, о чём сообщал в письмах Ферма, теперь включается во все учебники по теории чисел.

В формулировках Декарта и Ферма расстояния могли быть только положительными числами или нулем. Важная идея о том, что одно или оба расстояния можно также считать и отрицательными, принадлежат Исааку Ньютону. Готфрид Вильгельм Лейбниц первым назвал эти расстояния «координатами».





ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим теперь возможность введения *декартовых координат в пространстве*.

При изучении в курсе геометрии 10 класса перпендикулярности прямой и плоскости мы научились строить три взаимно перпендикулярные прямые (рис. 5.9а).

Построим горизонтальную плоскость xOy , проходящую через прямые Ox и Oy , и введём на ней декартову систему координат xOy (рис. 5.9б). Если мы также рассмотрим координатную прямую Oz , перпендикулярную плоскости xOy в точке O , то мы тем самым введём систему координат в пространстве. Точка O будет началом этой системы координат.

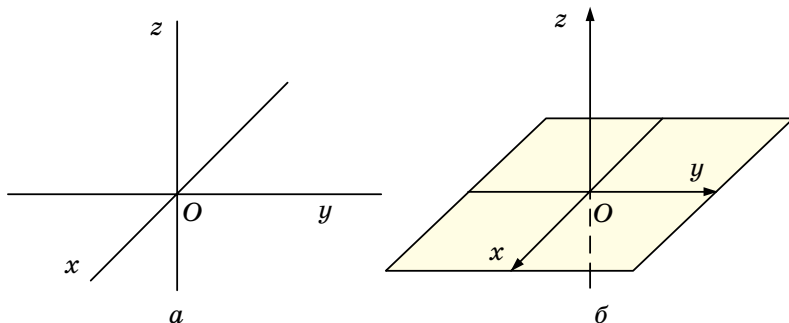


Рис. 5.9

Стрелки осей Ox , Oy и Oz на рисунках указывают положительное направление каждой оси.

В декартовой системе координат в пространстве мы имеем три оси: Ox – ось абсцисс, Oy – ось ординат, Oz – ось аппликат. Плоскости, проходящие через оси Ox и Oy , Oy и Oz , Ox и Oz , – координатные плоскости. Их можно обозначить соответственно: xy , yz , xz (рис. 5.10). Координатные плоскости разбивают всё пространство на восемь частей – *октантов* (рис. 5.10).

Если задана такая система координат, каждой точке пространства можно поставить в соответствие упорядоченную тройку действительных чисел, а каждой тройке чисел – единственную точку. Это взаимно однозначное соответствие нужно рассмотреть подробнее, т.к. приходится выполнять построения в пространстве, к которым нужно привыкнуть.

Пусть нам дана точка A , расположенная в первом октанте. Опустим из неё на плоскости yz , xz , xu перпендикуляры AA_x , AA_y , AA_z (рис. 5.11). Длины этих перпендикуляров называют координатами точки A . Записывают: $A(a, b, c)$. Если точка лежит в какой-нибудь из координатных плоскостей, её соответствующая координата равна 0, а если на оси координат, то две координаты такой точки – нули. Например, точка $B(0; 2; -3)$ лежит в плоскости yz , а точка $C(5; 0; 0)$ – на оси Ox .

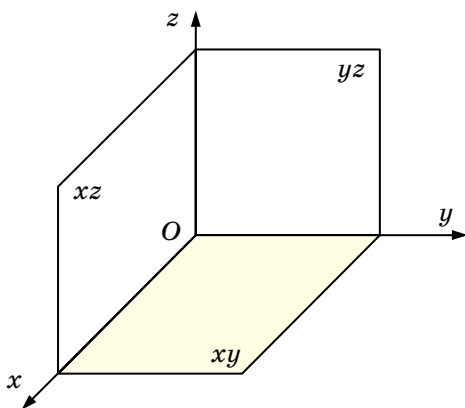


Рис. 5.10

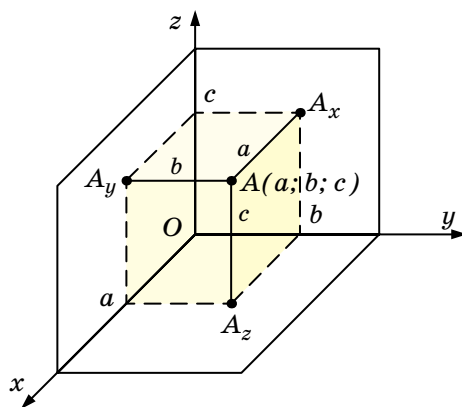


Рис. 5.11

На рис. 5. 12 точка P лежит в плоскости xOy , так что её проекция на ось Oz есть 0. её проекция на ось Ox совпадает с точкой, имеющей координату 2, а на ось Oy – с точкой, имеющей координату 3. Поэтому мы пишем $P(2; 3; 0)$.

Проверьте себя, ответив на следующие вопросы по рис. 5.12.

а) P_1 – точка в плоскости yz . Выпишите упорядоченную тройку чисел координат этой точки.

б) Точки P_2 и P_3 лежат в плоскости xz . Запишите их координаты в виде упорядоченных троек.

в) Какие две точки лежат в плоскости, параллельной плоскости xu ? Можете ли вы это доказать? Что можно сказать об их координатах?

Таким образом, нахождение координат точки пространства сводится к построению соответствующего прямоугольного параллелепипеда (рис. 5.11). Иногда мы его воспроизводим частично, чтобы были видны координаты точки (рис. 5.13).

Можно иначе находить координаты точки пространства. Пусть нам дана точка M . Спроектируем точку M на оси Ox , Oy , Oz в точки M_x , M_y , M_z соответственно (рис. 5.14). Координаты точек M_x , M_y , M_z на осях сопоставляются точке M как её координаты x , y , z . Таким образом, координатами точки в пространстве называются координаты её проекций на оси координат.



Одинаковы ли два указанных подхода к определению координат в пространстве?

Убедитесь самостоятельно, что эти подходы одинаковы. Вместе с тем, на рис. 5.11 координаты точки видны, и при соответствующем масштабе их можно примерно определить, а вот на рис. 5.14 всё зависит от того, как мы указали проекции точки M (заметим, что при этом могут быть различные искажения).

Теперь мы должны убедиться в том, что если есть три координаты – три числа a , b и c , то для них найдётся соответствующая точка пространства.

Три числа на осях координат отмечены тремя точками A_1 , A_2 , A_3 (рис. 5.15а). Представим себе, что отрезки OA_1 , OA_2 , OA_3 – рёбра прямоугольного параллелепипеда с вершиной в точке O . Построим этот параллелепипед (рис. 5.15б). Мы получили точку P с координатами a , b , c : $P(a; b; c)$. Докажите это самостоятельно.

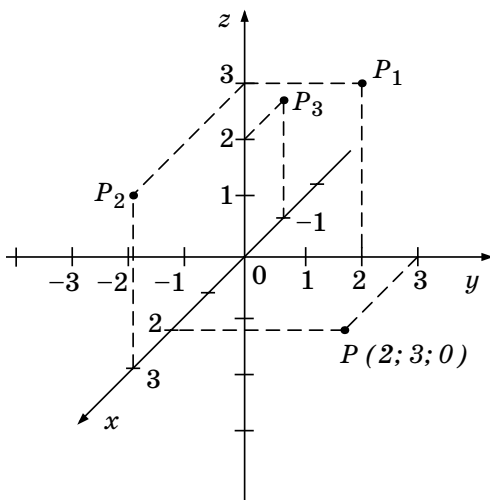


Рис. 5.12

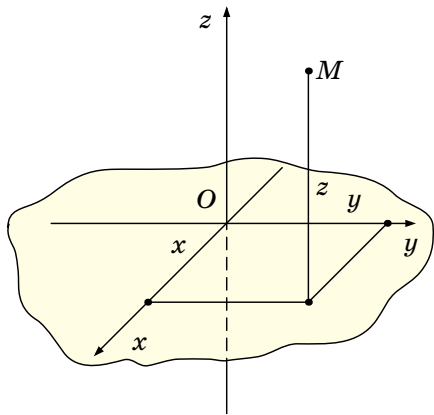


Рис. 5.13

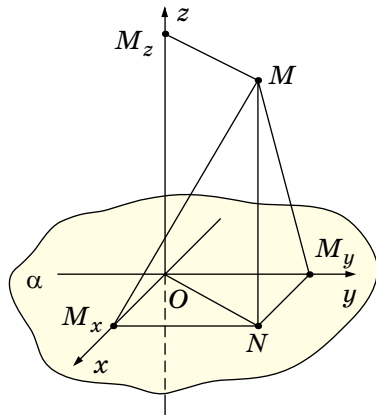


Рис. 5.14

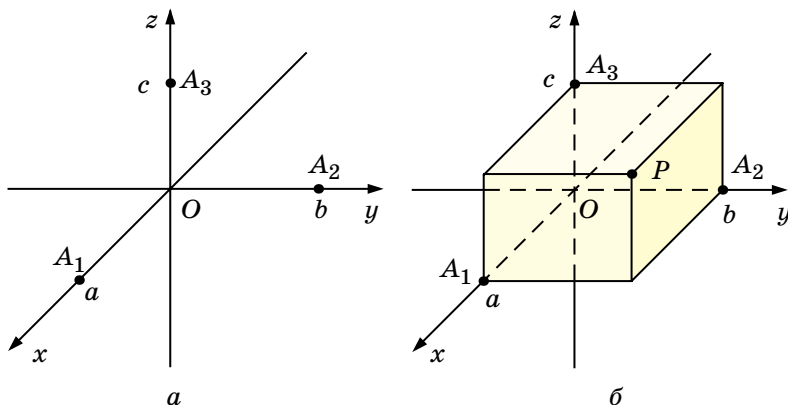
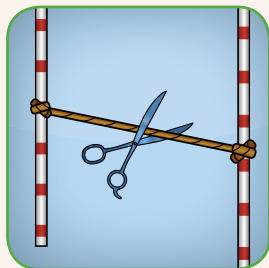


Рис. 5.15

Мы взяли случай, когда a, b, c положительны. Потренируйтесь в построении таких параллелепипедов для других случаев.

Итак, мы ввели систему декартовых координат в пространстве. Теперь следует научиться пользоваться этой системой.

§ 5.4



ФОРМУЛЫ КООРДИНАТ СЕРЕДИНЫ ОТРЕЗКА И РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ТОЧКАМИ

5.4.1 ФОРМУЛА КООРДИНАТ СЕРЕДИНЫ ОТРЕЗКА

Мы хотим получить первую формулу, которая связывает геометрию и алгебру – *формулу координат середины отрезка*.

Рассмотрим отрезок P_1P_2 , принадлежащий оси Ox . Пусть P – середина этого отрезка и пусть наши три точки имеют соответственно координаты x_1, x и x_2 ($x_1 < x_2$) (рис. 5.16). Выразим x через x_1 и x_2 .

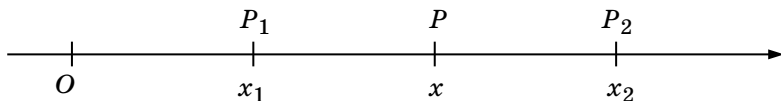


Рис. 5.16

Дано:

1. $P_1P = PP_2$.

2. $P_1P = |x - x_1| = x - x_1$;

$PP_2 = |x_2 - x| = x_2 - x$

(запись отрезка в координатах на прямой).

3. $x - x_1 = x_2 - x$, или $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ (1,2).

Эта формула применима и в случае, когда $x_2 < x_1$. (Докажите самостоятельно).

После того как мы нашли формулу для координат середины отрезка, принадлежащего оси Ox , легко перейти и к случаю, когда отрезок P_1P_2 произвольно расположен на плоскости.

1. Точка P является серединой отрезка P_1P_2 (дано) (рис. 5.17).

2. Построим проекции точек P_1 , P и P_2 на ось Ox , получим точки M , M_1 , M_2 (построение)

3. Точка M является серединой отрезка M_1M_2 (вывод обоснуйте самостоятельно).

4. $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ (3, формула координат середины отрезка на прямой).

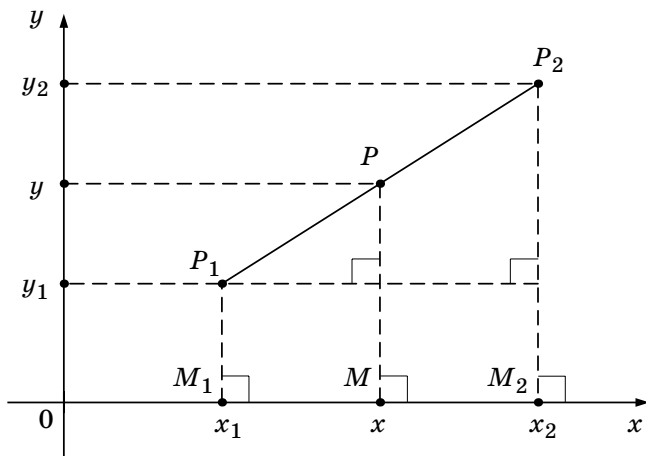


Рис. 5.17

Аналогично можно получить, что $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Вышеизложенное можно сформулировать в виде теоремы:

Теорема 28. Даны точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$. Серединой отрезка P_1P_2 является точка $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Теперь мы должны рассмотреть случай, когда отрезок расположен в пространстве, и его концы имеют соответственно три координаты. Вывод формулы в общем виде не представляет особых теоретических трудностей, но занимает много времени.

Мы рассмотрим конкретный пример, который позволит понять все шаги, связанные с выводом формулы середины отрезка, расположенного в пространстве.

ЗАДАЧА

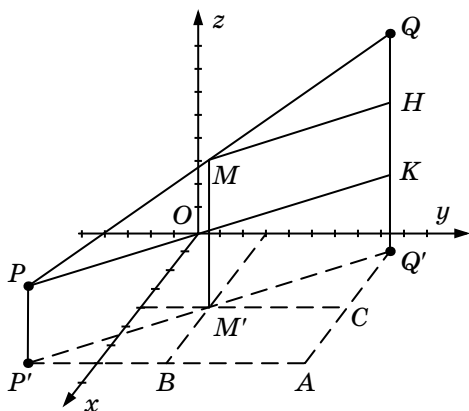


Рис. 5.18

Пусть нам дан отрезок PQ с координатами точки P и Q , соответственно равных $P(7; -3; 3)$ и $Q(1; 9; 9)$. M – середина отрезка PQ (рис. 5.18). Требуется найти координаты точки M .

Решение

Мы выполним некоторые построения, а их необходимость вы обоснуете самостоятельно.

Общая идея решения связана с нахождением координат точки M и связей этих координат с координатами точек P и Q .

Выполним такие построения:

1. Построим проекцию отрезка PQ на плоскость xOy . Получим отрезок $P'Q'$ (рис. 5.18).
2. Проведём $PK \parallel P'Q'$.
3. Проведём $P'A \parallel Ox$.
4. Проведём $AQ' \parallel Oy$.
5. Точка M' является проекцией точки M .
6. Точка H является серединой отрезка QK .

7. Точки B и C являются соответственно серединами отрезков AP' и AQ' (рис. 5.18).

Для обоснования выводов ответьте на следующие вопросы:

- Почему $PP' \parallel MM' \parallel QQ'$?
- Почему точка M' является серединой отрезка $P'Q'$?
- Каковы координаты точек P' , Q' , A и K' ?
- Каковы координаты точек B , C , H и M' ?
- Каковы координаты середины M отрезка PQ ?

5.4.2 ФОРМУЛА РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ТОЧКАМИ НА ПЛОСКОСТИ

Мы изучали понятие расстояния и возможности его измерения в курсе геометрии для 7–9 классов. Теперь, после введения системы координат, у нас появляется возможность находить *расстояния между точками, заданными своими координатами*. Начнём с рассмотрения двух точек на плоскости.

Пусть мы знаем координаты двух точек P_1 и P_2 на плоскости (рис. 5.19 а). Установим способ, позволяющий вычислить расстояние P_1P_2 по координатам (x_1, y_1) и (x_2, y_2) этих точек.

1. Построим на осях координат Ox и Oy координаты точек P_1 и P_2 . Для этого из точек P_1 и P_2 опустим перпендикуляры на оси Ox и Oy (рис. 5.19 б).

2. Основания перпендикуляров, опущенных из точек P_1 и P_2 на оси координат, – это точки M_1, N_1 и M_2, N_2 , а R – точка, в которой пересекаются прямые P_1N_1 и P_2N_2 (рис. 5.19 б).

3. В результате выполненных построений мы получим прямоугольный треугольник P_1P_2R . В нём $P_1P_2^2 = P_1R^2 + RP_2^2$ (1, 2, теорема Пифагора).

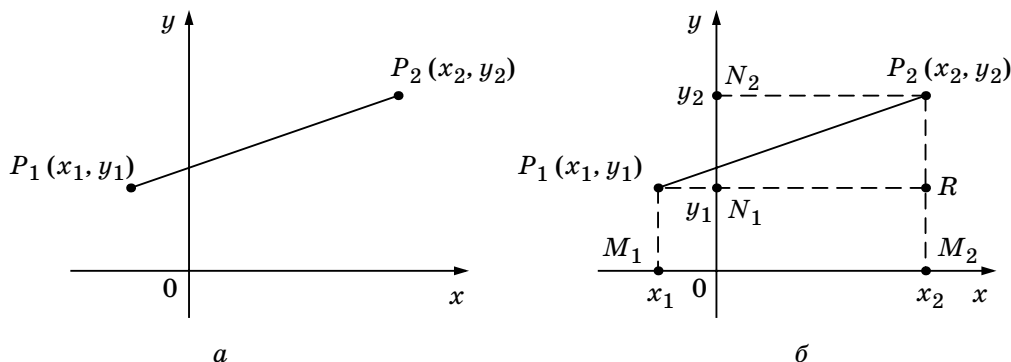


Рис. 5.19

4. Противоположные стороны прямоугольника $P_1M_1M_2R$ равны, т.е. $P_1R = M_1M_2$, аналогично $P_2R = N_1N_2$ (2, свойства прямоугольника).

5. $P_1P_2^2 = M_1M_2^2 + N_1N_2^2$ (3, 4).

6. Изучив координаты точек на прямой, мы знаем, что $M_1M_2 = |x_2 - x_1|$ и $N_1N_2 = |y_2 - y_1|$ (2, координаты точек на прямой).

7. $P_1P_2^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$ (5, 6).

8. Т.к. квадрат числа совпадает с квадратом его абсолютной величины, то равенство 7 можно переписать так:

$P_1P_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ (7).

9. Поскольку $P_1P_2 \geq 0$, мы получаем:

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Это и есть формула, которую мы хотели вывести. Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 29. Расстояние между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) координатной плоскости равно $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Например, если $P_1(3; 4)$ и $P_2(-2; 1)$ (рис. 5.20), то из полученной формулы следует, что

$$P_1P_2 = \sqrt{(-2-3)^2 + (1+4)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}.$$

Заметим, что этот результат мы могли бы «увидеть» на рис. 5.20, не пользуясь нашей формулой. Поскольку $a = 5$ и $b = 3$, по теореме Пифагора имеем:

$$P_1P_2 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}.$$

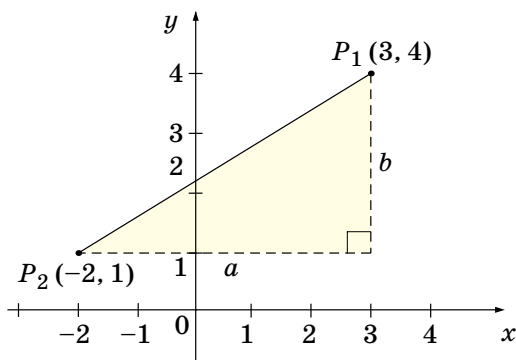


Рис. 5.20

Однако для того чтобы это увидеть, нам пришлось проделать всё то же, что нужно для вывода нашей формулы. Основное достоинство вывода общих формул как раз и состоит в том, что мы проводим некоторое рассуждение лишь один раз, а применять результат можем много раз – всегда, когда это нам понадобится, не повторяя каждый раз наше рассуждение снова и снова.

5.4.3 ФОРМУЛА РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ТОЧКАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть даны две точки $P(x_1, y_1, z_1)$ и $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Мы можем построить на осях координат координаты этих точек – это будут проекции точек P и Q на три оси координат: $P_x, P_y, P_z, Q_x, Q_y, Q_z$. Попробуем обойтись без чертежа, так как его довольно трудно построить.

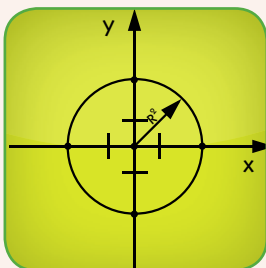
1. По пространственной теореме Пифагора квадрат расстояния между P и Q , т.е. квадрат длины отрезка PQ , равен сумме квадратов его проекций на любые три взаимно перпендикулярные прямые: $PQ^2 = P_xQ_x^2 + P_yQ_y^2 + P_zQ_z^2$.

2. Расстояние между точками на прямой, где введены координаты, равно модулю разности координат:

$$P_xQ_x = |x_2 - x_1|, P_yQ_y = |y_2 - y_1|, P_zQ_z = |z_2 - z_1|.$$

$$3. PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1, 2).$$

§ 5.5



УРАВНЕНИЯ ФИГУР

5.5.1 КАК ЗАДАВАТЬ ФИГУРЫ УРАВНЕНИЯМИ

В курсе алгебры мы решаем уравнения и неравенства, а в курсе геометрии изучаем свойства геометрических фигур. Появление декартовых координат позволило объединить эти направления. Название этого раздела означает, что геометрические фигуры можно задавать уравнениями (мы увидим, что некоторые фигуры можно задавать и неравенствами). Научимся это делать.

Вам известно, что точки плоскости и пространства задаются их координатами. Геометрические фигуры, как мы увидим позднее, могут задаваться уравнениями или неравенствами: $ax + by + c = 0$ – уравнение прямой; $x^2 + y^2 = a^2$ – уравнение окружности; $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ – неравенство, задающее шар, и т.д.

Говорят, что фигура F задаётся уравнением в прямоугольных координатах, если точка принадлежит фигуре F тогда и только тогда, когда координаты этой точки удовлетворяют данному уравнению. Это означает, что выполняется два условия:

1. Если точка принадлежит фигуре F , то её координаты удовлетворяют данному уравнению.
2. Если числа x, y, z удовлетворяют данному уравнению, то точка с такими координатами принадлежит фигуре F .

Второе условие можно выразить иначе: координаты любой точки, не принадлежащей фигуре F , не удовлетворяют данному уравнению.

Например, прямая, перпендикулярная оси Ox и проходящая через точку $M(2; 0)$ на оси Ox задается уравнением $x = 2$ (рис. 5.21а). Действительно, каждая точка, лежащая на этой прямой, имеет одну и ту же координату 2. А любая точка, не лежащая на этой прямой, имеет другое значение координаты x , нежели 2. Ось Oy задается уравнением $x = 0$.

Аналогично, прямая, перпендикулярная оси Oy и проходящая через точку $N(0; 3)$ имеет уравнение $y = 3$ (рис. 5.21б). Ось Ox имеет уравнение $y = 0$.

Задавать фигуры уравнениями в пространстве достаточно сложно, поэтому мы будем говорить в основном об уравнениях фигур на плоскости. В таблице приведены примеры некоторых фигур и задающих их уравнений и неравенств.

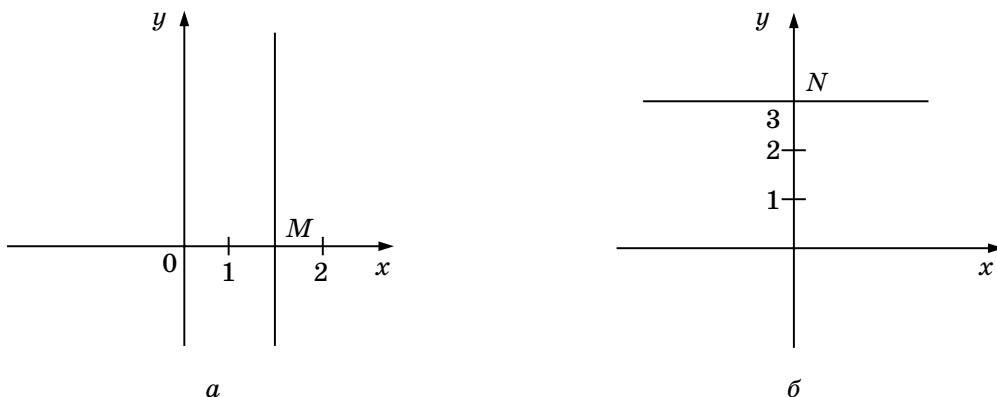


Рис. 5.21

Фигура	Уравнение или неравенство
1. Полуплоскость, лежащая над осью Ox (рис. 5.22а).	$y > 0$
2. Полуплоскость, лежащая справа от оси Oy (рис. 5.22б).	$x > 0$
3. Ось Oy (рис. 5.22в).	$x = 0$
4. Первая четверть (рис. 5.22г).	$x > 0$ и $y > 0$
5. Вертикальная прямая, проходящая через точку с координатами $(1; 0)$ (рис. 5.22д).	$x = 1$
6. Вертикальная прямая, проходящая через точку с координатами $(3; 0)$ (рис. 5.22е).	$x = 3$
7. Бесконечная полоса, заключённая между прямыми, описанными условиями 5 и 6 (рис. 5.22ж).	$1 < x < 3$

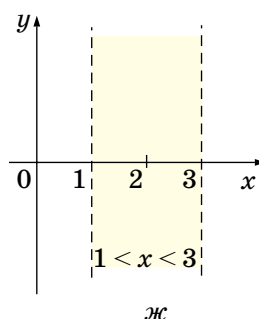
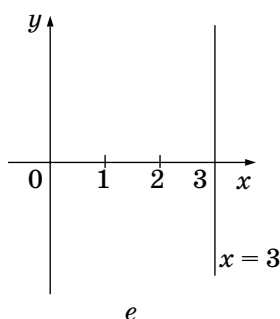
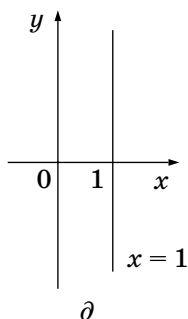
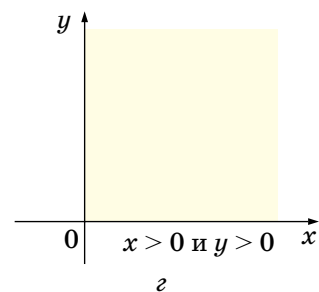
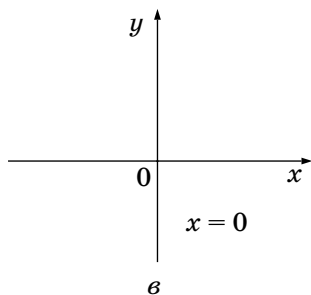
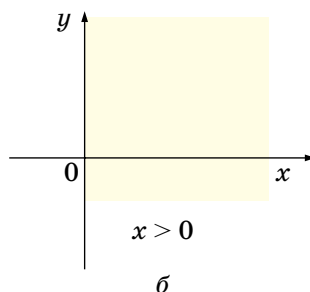
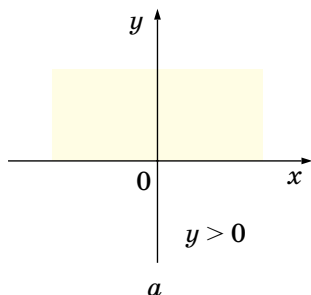


Рис. 5.22

Найдём уравнения некоторых других наиболее важных фигур.

а) Составим *уравнение окружности* с центром в точке $O(a, b)$ и радиусом R (рис. 5.23).

1. Возьмём произвольную точку $A(x, y)$ на окружности. Расстояние от нее до центра O равно R .

2. Квадрат расстояния от точки A до точки O равен $(x - a)^2 + (y - b)^2$ (формула расстояния между точками).

3. Координаты x, y каждой точки A окружности удовлетворяют уравнению $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ (2, определение окружности).

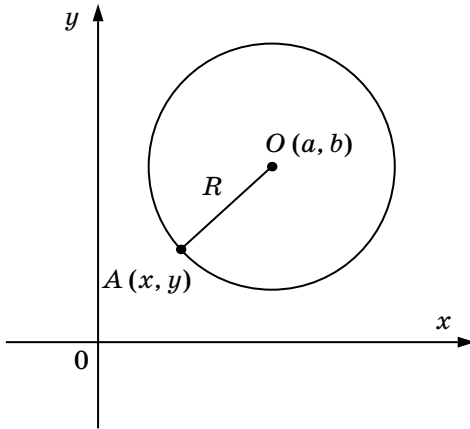


Рис. 5.23

Мы получили искомое уравнение, но нам нужно ещё проверить справедливость обратного утверждения.

Обратно: любая точка A , координаты которой удовлетворяют уравнению окружности, принадлежит окружности, так как расстояние от нее до точки O равно R . Отсюда следует, что данное уравнение действительно является уравнением окружности с центром в точке O и радиусом R .

Заметим, что если центром окружности является начало координат, то уравнение окружности имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$.

5.5.2 УРАВНЕНИЕ СФЕРЫ

Предположим, что в пространстве введена прямоугольная система координат и задана сфера S с центром $A(a; b; c)$ и радиусом r . Эта сфера есть множество точек M , для которых расстояние от A равно r , т.е. $AM = r$ (рис. 5.24).

Пусть x, y, z — координаты точки M . Согласно формуле расстояния между точками в пространстве предыдущее равенство можно записывать в координатах так:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r,$$

или $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$.

Это и есть уравнение сферы S с центром $A(a; b; c)$ и радиусом r , т.е. множество точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению представляет собой сферу S (рис. 5.24).

Если центр A находится в начале координат, т.е. $a = b = c = 0$, то уравнение приобретает более простой вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Мы должны проверить истинность обратного утверждения: каждая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению сферы, принадлежит этой сфере. Проверьте это самостоятельно.

в) А как можно задать шар?

Рассмотрим шар с центром $A(a; b; c)$ и радиусом r (рис. 5.25). По определению это множество точек M , для которых $AM \leq r$, т.е. $AM^2 \leq r^2$. Выразая расстояние AM через координаты точки $M(x; y; z)$, получим: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq r^2$.

Это неравенство задаёт шар S с центром $A(a, b, c)$ и радиусом r , так как оно равносильно неравенству $AM \leq r$, задающему такой шар по самому его определению.

Если центр шара находится в начале координат, то неравенство, задающее шар, упрощается и имеет вид: $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$.

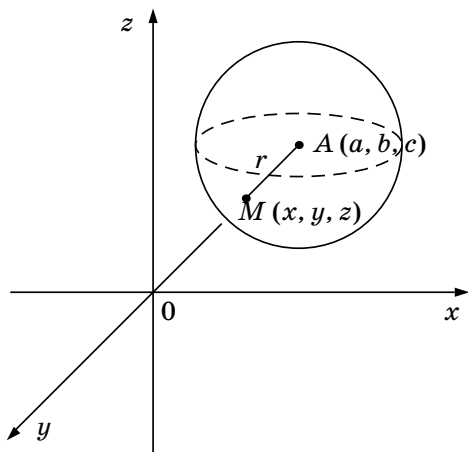


Рис. 5.24

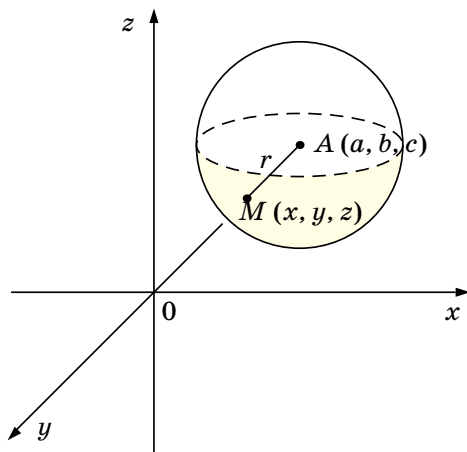
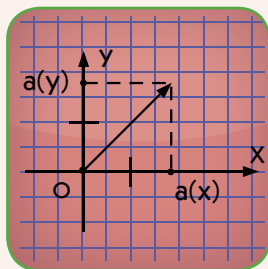


Рис. 5.25



КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Вспомним § 4.4. «Базис на плоскости и в пространстве», где мы изучали вопросы о разложении вектора на плоскости по двум неколлинеарным векторам и о разложении вектора в пространстве по трём некомпланарным векторам. Сейчас мы обсудим, какой геометрический смысл имеют действительные числа, входящие в эти разложения.

5.6.1 КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА НА ПЛОСКОСТИ

Займёмся сначала *координатами вектора на плоскости*. Начнём с определения *проекции вектора на координатную ось*. Пусть задана координатная ось Ox (рис. 5.26 а). Единичный отрезок OE теперь будем считать единичным вектором $\vec{i} = \overline{OE}$, т.е. вектором, длина которого равна единице (рис. 5.26 а).

Возьмём любой вектор $\vec{a}$ и отложим его от некоторой точки A : $\overline{AB} = \vec{a}$. Спроектируем точки A и B на ось Ox . Получим точки A_1 и B_1 . Вектор $\overline{A_1B_1}$ называется *составляющей вектора $\overline{AB}$ по оси Ox* (рис. 5.26 б). Её длина со знаком «плюс» или «минус» и называется *проекцией вектора $\vec{a}$ на ось Ox* .

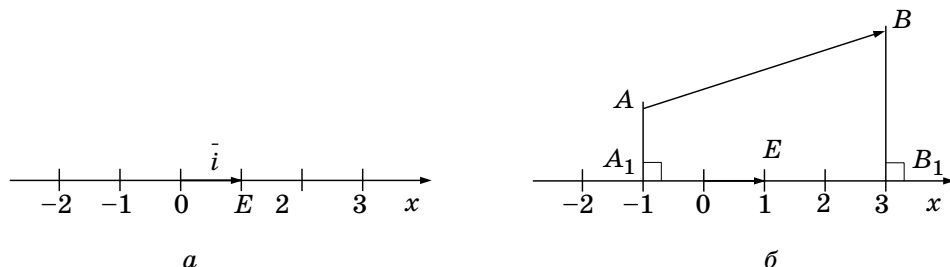


Рис. 5.26

Определение 45. Проекцией a_x вектора $\vec{a} = \overline{AB}$ на ось Ox называется длина его составляющей $\overline{A_1B_1}$ по этой оси, взятая со знаком «плюс» или «минус». При этом берётся знак «плюс», если направление вектора $\overline{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси Ox , и знак «минус», если эти направления противоположны. Если $\overline{A_1B_1} = \vec{0}$, т.е. точки A_1 и B_1 совпадают, то $a_x = 0$.

Мы раньше много раз говорили о проекциях различных фигур на ось. Обратите внимание на то, что проекция точки – точка, проекция отрезка – отрезок (или точка), а проекция вектора – число.

Вектор $\overline{A_1B_1}$ получается из коллинеарного ему единичного вектора $\vec{i}$ умножением на число, равное $\pm |\overline{A_1B_1}|$ (рис. 5.26 б). При этом если вектор $\overline{A_1B_1}$ сонаправлен с вектором $\vec{i}$, то $\overline{A_1B_1} = |\overline{A_1B_1}| \vec{i}$. Если же вектор $\overline{A_1B_1}$ направлен противоположно вектору $\vec{i}$, то $\overline{A_1B_1} = -|\overline{A_1B_1}| \vec{i}$.

Следовательно, имеет место равенство $\overline{A_1B_1} = a_x \vec{i}$.

Можно доказать следующие свойства проекций векторов на ось.

Свойство 1. *Равные векторы имеют равные проекции на заданную ось.*

Свойство 2. *При сложении векторов их проекции на ось складываются (проекция суммы равна сумме проекций).*

Свойство 3. *При умножении вектора на число его проекция умножается на это число.*

Для введения понятия *координат вектора* следует рассмотреть возможность разложения вектора по осям координат. Начнём с разложения вектора по двум осям координат на плоскости.

Мы хотим каждый вектор задать парой чисел – проекциями этого вектора на оси координат. При таком подходе действия над векторами можно свести к действиям с парами чисел.

Прежде чем ввести понятие координат вектора, докажем теорему.

Теорема 30. Пусть на плоскости введена прямоугольная система координат с единичными векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$ координатных осей Ox и Oy . Пусть $\vec{a}$ – некоторый вектор, а a_x и a_y – его проекции на оси координат. Тогда вектор $\vec{a}$ единственным образом представляется в виде $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ (рис. 5.27).

По правилу параллелограмма $\overline{OA} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2}$ (рис. 5.27). Вектор $\overline{OA_1}$, как мы установили выше, получается из коллинеарного ему единичного

вектора $\vec{i}$ умножением на проекцию на a_x вектора $\overline{OA_1}$ ось Ox , т.е. имеет место равенство $\overline{OA_1} = a_x \vec{i}$. Аналогично устанавливается, что $\overline{OA_2} = a_y \vec{j}$.

Мы получили таким образом формулу для разложения вектора $\vec{a}$ по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ (если учесть наши обозначения): $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$.

Пара чисел a_x и a_y называется *координатами вектора $\vec{a}$ в данной системе координат*.

В параграфе 4.4. говорили о единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам. Докажем эту единственность в рассматриваемом случае.

Итак, мы имеем:

1. Вектор $\vec{a}$ разложен по единичным векторам $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ (дано).
2. Предположим, что есть еще одно разложение $\vec{a} = c \vec{i} + b \vec{j}$ (предположение).
3. $a_x = c$, $a_y = b$ (требуется доказать).
4. Т.к. $c \vec{i} + b \vec{j} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$, то $a_x \vec{i} - c \vec{i} = a_y \vec{j} - b \vec{j}$.
5. Слева в последнем равенстве п.4 стоит вектор, коллинеарный вектору $\vec{i}$, а справа – вектор, коллинеарный вектору $\vec{j}$ (2, свойства коллинеарных векторов).
6. $\vec{i} \perp \vec{j}$ (дано).
7. Векторы $a_x \vec{i} - c \vec{i}$ и $a_y \vec{j} - b \vec{j}$ взаимно перпендикулярны (5, 6).
8. Но взаимно перпендикулярные векторы равны лишь в одном случае, когда они нулевые. Поэтому $a_x \vec{i} - c \vec{i} = \vec{0}$ и $a_y \vec{j} - b \vec{j} = \vec{0}$.
9. $a_x \vec{i} = c \vec{i}$ и $a_y \vec{j} = b \vec{j}$ (8).
10. $a_x = c$, $a_y = b$ (9, пятое свойство операции умножения вектора на число). ■

Таким образом, на координатной плоскости любой вектор $\vec{a}$ можно задать его координатами a_x , a_y и писать: $\vec{a}(a_x, a_y)$, или $\vec{a} = (a_x, a_y)$.

5.6.2 КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ

Координаты вектора в пространстве определяются так же, как на плоскости. Справедлива следующая теорема:

Теорема 31. Пусть в пространстве введена прямоугольная система координат с единичными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ координатных осей Ox , Oy , Oz . Тогда вектор $\vec{a}$ единственным образом представляется в виде $a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ (рис. 5.28).

Числа a_x, a_y, a_z называются координатами вектора $\vec{a}$ относительно векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, которые называются *базисными векторами* или, кратко, *базисом*.

Доказательство этой теоремы проведите самостоятельно, используя при этом рис. 5.28.

Введённые координаты вектора позволяют получить *формулу длины вектора*.

Вернёмся к рис. 5.27.

1. Если точка A не лежит на координатных осях, то треугольник OAA_1 прямоугольный (рис. 5.27).

2. $OA^2 = OA_1^2 + A_1A^2$ (1, теорема Пифагора).

3. Так как $A_1A = OA_1$, то получаем, что $OA^2 = OA_1^2 + A_1A^2$ (2).

4. Но $OA = |\vec{a}|$, $OA_1 = |a_x|$, $OA_2 = |a_y|$, поэтому $|\vec{a}|^2 = |a_x|^2 + |a_y|^2$, т.е. $|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2$ (3, 4).

Формула справедлива и в тех случаях, когда точка A лежит на какой-то оси координат (объясните это подробнее).



Квадрат длины вектора равен сумме квадратов его координат.

Получаем формулу длины вектора на плоскости: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Самостоятельно докажете формулу для нахождения длины вектора в пространстве, заданного координатами a_x, a_y, a_z :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

В курсе геометрии нам не очень часто придётся работать с векторами в координатах (это часто приходится делать в курсе физики). Мы перечислим *свойства координат вектора*, а вы можете доказать их самостоятельно.

Свойство 1. Координаты равных векторов соответственно равны. Обратное: векторы, имеющие соответственно равные координаты, равны.

Свойство 2. При сложении векторов их соответствующие координаты складываются. А именно, если $\vec{a} = (a_x, a_y)$, $\vec{b} = (b_x, b_y)$ и $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то $\vec{c} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$, т.е. $c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$.

Свойство 3. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число. А именно, если $\vec{a} = (a_x, a_y)$, $\vec{b} = (b_x, b_y)$ и $\vec{b} = t\vec{a}$, то $\vec{b} = (ta_x, ta_y)$, т.е. $b_x = ta_x$, $b_y = ta_y$.

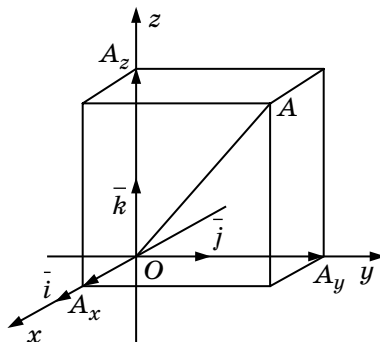


Рис. 5.28

Изучим *связь координат векторов и координат точек*. Доказывая теорему о разложении вектора по координатным осям, мы откладывали его от начала координат. Это вовсе не обязательно. Например, отложим вектор $\vec{a}$ от точки $A(x_1, y_1)$, и пусть его концом будет точка $B(x_2, y_2)$ (рис. 5.29). Спроектируем точки A, B в точки A_1, B_1 на ось Ox и в точки A_2, B_2 на ось Oy . Тогда $\overline{A_1B_1} = a_x \vec{i}$, $\overline{A_2B_2} = a_y \vec{j}$, $\vec{a} = \overline{AB} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$.

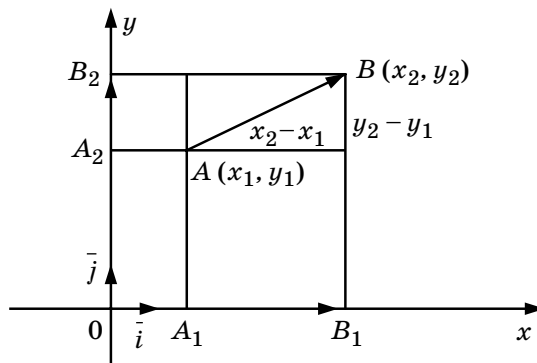


Рис. 5.29

Вычисляя проекции вектора через координаты его начала и конца, получаем: $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$.

Поэтому $\vec{a} = \overline{AB} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j}$.



Чтобы найти координаты вектора, нужно от координат конца вектора отнять координаты начала вектора.

В частности, если вектор отложен от начала координат, то координаты вектора равны координатам его конца.

Ясно, что задание прямоугольной системы координат на прямой, на плоскости и в пространстве равносильно заданию начала координат и базиса – единичных направляющих векторов осей координат. Для случая пространства вектор $\vec{i}$ определяет направление оси Ox , вектор $\vec{j}$ идёт по оси Oy , вектор $\vec{k}$ – по оси Oz (рис. 5.30). Более того, оказывается, что координаты любой точки $M(x, y, z)$ в данной системе прямоугольных координат – это координаты её радиус-вектора $\overline{OM} = (x, y, z)$ относительно соответствующего

этой системе координат базиса, причём это верно и для прямой, и для плоскости, и для пространства.

Для случая прямой это утверждение, очевидно, вытекает из определения координаты на прямой, теоремы и определения радиус-вектора.

Рассмотрим случай пространства (для плоскости доказательство аналогично).

1. Возьмём в пространстве некую прямоугольную систему координат с началом в точке O и координатными осями Ox , Oy , Oz . (рис. 5.31)

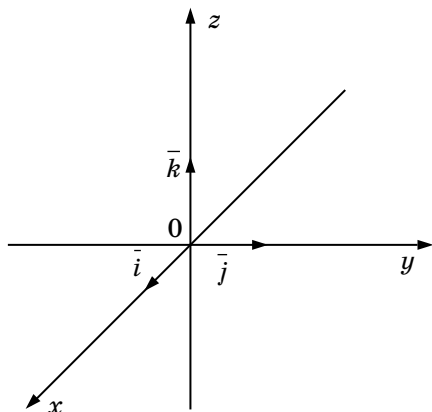


Рис. 5.30

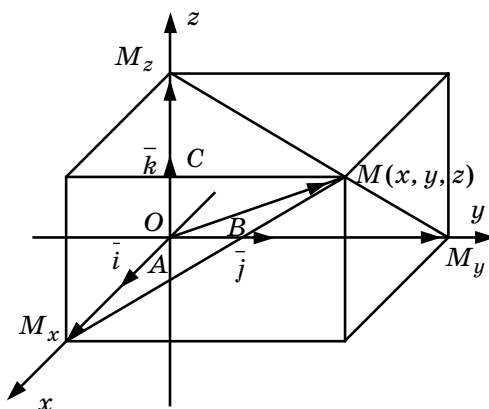


Рис. 5.31

2. Пусть A , B , C – точки с единичными координатами на этих осях, т.е. $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

3. Тогда векторы $\bar{i} = \overline{OA}$, $\bar{j} = \overline{OB}$, $\bar{k} = \overline{OC}$ – это направляющие единичные векторы координатных осей Ox , Oy , Oz .

4. Возьмём любую точку $M(x, y, z)$, и пусть $\overline{OM}$ – её радиус-вектор. Разложим $\overline{OM}$ по осям координат. Тогда получим, что $\overline{OM} = \overline{OM_x} + \overline{OM_y} + \overline{OM_z}$, где M_x , M_y , M_z – проекции точки M на оси координат.

5. Из определения координат x , y , z точки M следует, что точки M_x , M_y , M_z имеют такие координаты: $M_x(x, 0, 0)$, $M_y(0, y, 0)$, $M_z(0, 0, z)$.

6. С другой стороны, так как для случая прямой уже доказано, что $\overline{OM_x} = x\bar{i}$, $\overline{OM_y} = y\bar{j}$, $\overline{OM_z} = z\bar{k}$, то подставляя, получаем: $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

7. Итак, доказано, что координаты точки M соответственно равны координатам её радиус-вектора $\overline{OM}$ относительно базиса $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$.



УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ



Мы уже научились задавать с помощью уравнений различные геометрические фигуры: прямую, окружность, сферу, шар.

Выведем теперь уравнение плоскости.

5.7.1 ЕЩЁ РАЗ ОБ УРАВНЕНИЯХ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Пусть нам дано уравнение с тремя переменными $P(x, y, z) = 0$.
2. Предположим, что множество его решений не пусто. Каждое решение есть тройка чисел $(x; y; z)$. В координатном пространстве этой тройке чисел соответствует точка $M(x; y; z)$.
3. Множество всех точек пространства, координаты которых являются решениями уравнения $P(x, y, z) = 0$, есть некоторая фигура Φ .

5.7.2 УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

Начнём с решения такой задачи.

ЗАДАЧА 1

Составить уравнение плоскости α , которая проходит через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и перпендикулярна ненулевому вектору $\vec{n}(a, b, c)$.

Решение

1. Для любой точки $M(x; y; z)$ плоскости α ($M \neq M_1$) вектор $\overline{M_1M}$ перпендикулярен вектору $\vec{n}$ (рис. 5.32).
2. $\vec{n} \cdot \overline{M_1M} = 0$ (1, свойство скалярного произведения векторов).
3. Это равенство выполняется и в том случае, если $M = M_1$.

4. Учитывая, что $\vec{n} = (a, b, c)$ и $\vec{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$, из равенства в п.2. получим:

$$\vec{M_1M} \cdot \vec{n} = a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

(1, 3, 4, свойства координат вектора).

5. Координаты любой точки N , не принадлежащей α , уравнению п. 4 не удовлетворяют, так как $\vec{n} \cdot \vec{M_1N} \neq 0$.

6. Итак, каждую плоскость можно задать линейным уравнением с тремя переменными, имеющим по крайней мере один ненулевой коэффициент при переменных.

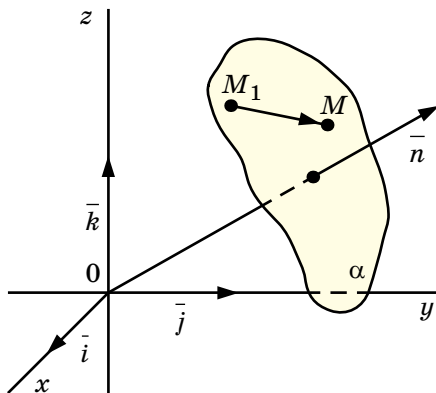


Рис. 5.32

ЗАДАЧА 2

Убедитесь, что всякое уравнение первой степени с тремя переменными задает в координатном пространстве некоторую плоскость.

Решение

1. Рассмотрим произвольное уравнение первой степени:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

2. Такое уравнение имеет бесконечное множество решений. Пусть $(x_1; y_1; z_1)$ – какое-нибудь его решение. Для любого его решения выполняется равенство:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0.$$

3. Вычитая из уравнения п. 1 равенство п. 2, получим уравнение, равносильное уравнению п.1:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

4. Но уравнение в п. 3 есть уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n} = (a, b, c)$. Такая плоскость единственна (свойство перпендикуляра к плоскости).

Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема 32. Всякое уравнение первой степени $ax + by + cz + d = 0$ задаёт в координатном пространстве единственную плоскость, которая перпендикулярна вектору с координатами $(a; b; c)$.

Зная координаты вектора $\vec{n} = (a; b; c)$, можно решить вопрос о расположении плоскости $ax + by + cz + d = 0$ относительно координатных осей. Например, если $c \neq 0$, $a = b = 0$, то $\vec{n} = (0; 0; c)$, т.е. $\vec{n} = c\vec{k}$. Следовательно, уравнение $cz + d = 0$ задаёт плоскость, перпендикулярную оси аппликат.



ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КООРДИНАТ

Всё, что связано с использованием в математике декартовых координат, можно назвать *методом координат*. Этот метод можно рассматривать в двух основных направлениях.

Задавая фигуры уравнениями и неравенствами (как в параграфе 5.5) и выражая в координатах различные геометрические соотношения, мы применяем алгебру к решению геометрических задач, к доказательству геометрических теорем. Так, например, мы начали с того, что через прямоугольные координаты выразили основное геометрическое понятие – расстояние между точками. Это был первый шаг в применении метода координат.

Второе направление применения метода координат противоположно первому; оно состоит в том, чтобы, пользуясь координатами, истолковывать (изображать) алгебраические и аналитические соотношения и факты геометрически и тем самым применить геометрию в алгебре. Примером этого направления является изображение функций с помощью графиков.

Метод координат объединяет геометрию и алгебру и даёт возможности для их эффективного развития. Именно на этом пути происходило развитие математики от Декарта и Ньютона до наших дней.

В этом параграфе мы покажем, как можно использовать метод координат для доказательства геометрических теорем (решения задач). Начнём с решения конкретной задачи.

ЗАДАЧА 1

Докажите, что середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от его вершин (рис. 5.32).

Решение

1. Нам дан треугольник ABC , его стороны обозначим через a , b , c .
2. Середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от его вершин (требуется доказать).

3. Первым шагом при применении метода координат является такой выбор осей и начала координат, при котором алгебраические выкладки становятся возможно более простыми. Для нашей задачи удачный выбор системы координат показан на рисунке 5.33а. Начало координат мы помещаем в точку A , а оси проводим через точки B и C так, чтобы эти точки лежали на положительных лучах осей (построение) (рис. 5.33а).

4. $B = (a; 0)$ и $C (0; b)$ (1, 2).

5. Середина отрезка точка D имеет координаты $D = (a/2, b/2)$ (1, формула середины отрезка).

6. (2) $AD = \sqrt{(\frac{a}{2}-0)^2 + (\frac{b}{2}-0)^2}$ (2, 3, 4, формула расстояния между точками). ■

Можно выбрать систему координат и по-другому (рис. 5.33а, б, в). Если выбрать оси совершенно случайно (рис. 5.33г), то лёгкую задачу можно превратить в очень трудную.

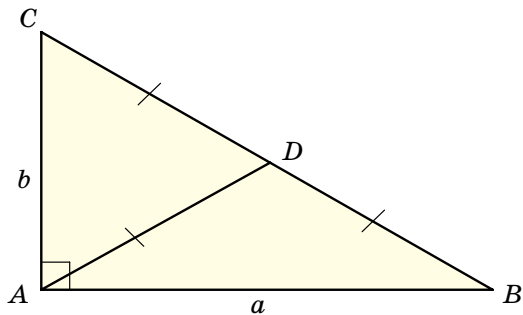


Рис. 5.32

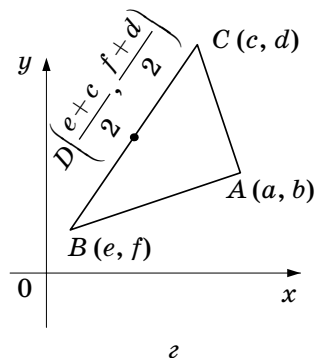
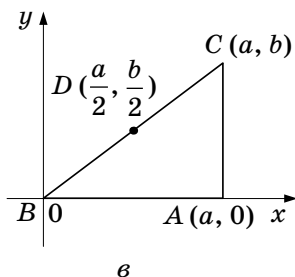
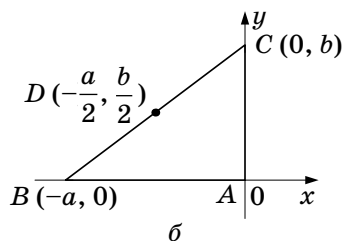
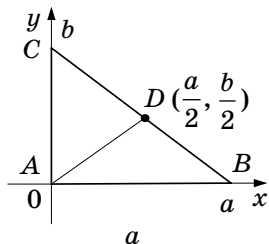


Рис. 5.33

Чтобы начать доказательство, исходя из рис. 5.33г, нужно найти способ, позволяющий выразить алгебраически, что $\triangle ABC$ имеет при вершине A прямой угол. Сделать это можно, но не очень просто.

ЗАДАЧА 2

Два предприятия A и B производят продукцию с одной и той же ценой m руб. за одно изделие. Однако автопарк, обслуживающий предприятие A , оснащён более современными и более мощными грузовыми автомобилями. В результате транспортные расходы на перевозку одного изделия составляют для предприятия A 10 руб. на 1 км, а для предприятия B – 20 руб. на 1 км. Расстояние между предприятиями 300 км. Как территориально должен быть разделён рынок сбыта между двумя предприятиями для того, чтобы расходы потребителей при покупке изделий были минимальными?

Решение

1. Для решения данной задачи воспользуемся методом координат. Систему координат выберем так, чтобы ось Ox проходила через пункты A и B , а ось Oy – через точку A (рис. 5.34а).

2. Пусть N – произвольная точка, s_1 и s_2 – расстояния от точки N до предприятий A и B (рис. 5.34б).

3. При доставке груза из пункта A расходы равны $m + 10s_1$.

4. При доставке груза из пункта B расходы равны $m + 20s_2$.

5. Если для пункта N выгоднее доставлять груз с предприятия A , то $m + 10s_1 < m + 20s_2$, откуда $s_1 < 2s_2$, в обратном случае получим $s_1 > 2s_2$.

6. Таким образом, за границей области для каждой точки, до которой расходы на перевозку груза из пунктов A и B равны, будет множество точек плоскости, удовлетворяющих уравнению $s_1 = 2s_2$.

7. Выразим s_1 и s_2 через координаты:

$$s_1 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad s_2 = \sqrt{(300 - x)^2 + y^2}.$$

8. Имея в виду равенство из п.6, получим

$$(x - 400)^2 + y^2 = 200^2.$$

9. Это есть уравнение окружности (рис. 5.34в)

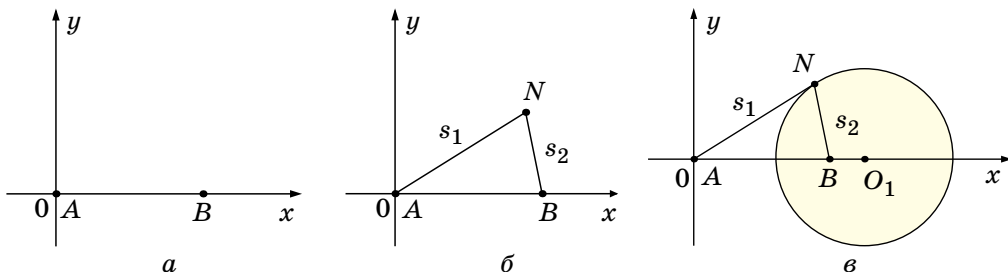


Рис. 5.34

10. Следовательно, для всех пунктов, попадающих во внутреннюю область круга, выгоднее привозить груз из пункта B , а для всех пунктов, попадающих во внешнюю часть круга, – из пункта A . ■

ЗАДАЧА 2

Два наблюдательных пункта находятся в точках A и B . Пункт наблюдения O находится на прямой AB и удалён от точки A на расстояние a км, а от B на расстояние c км ($c > a$). Наблюдатель для безопасности должен идти по такому пути, чтобы расстояние от него до пункта A все время оставалось в два раза больше, чем расстояние от него до пункта B . По какой линии должен идти наблюдатель?

Решение

1. Примем за начало координат наблюдательный пункт O , и направление оси Ox будет проходить через пункты A и B (по условию задачи эти три точки находятся на одной прямой) (рис. 5.35).

2. Пусть наблюдатель находится в точке $M(x; y)$. Вычислим расстояние от наблюдателя до пунктов A и B (рис. 5.35):

$$MA = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \quad MB = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}.$$

3. По условию задачи имеем: $MA = 2MB$, т.е.

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = 2\sqrt{(c-x)^2 + y^2} \quad (1, 2).$$

4. Решая это уравнение, получим: $(x-a)^2 + y^2 = 4((c-x)^2 + y^2)$ (3)

5. Раскроем скобки: $3y^2 + 3(x + \frac{a-4c}{3})^2 = \frac{2}{3}(a^2 - 6c + 8c^2)$, или окончательно

$$y^2 + (x + \frac{a-4c}{3})^2 = \frac{2}{9}(a^2 - 6c + 8c^2) \quad (4).$$

6. Наблюдатель должен идти по окружности с центром $(\frac{a-4c}{3}; 0)$ и ради-

усом $\sqrt{\frac{2}{9}(a^2 - 6c + 8c^2)}$. (4, 5, уравнение окружности). ■

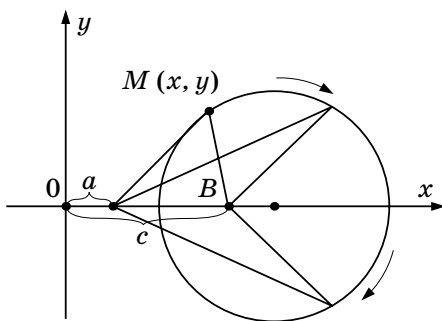


Рис. 5.35

ЗАДАЧИ К § 5.1

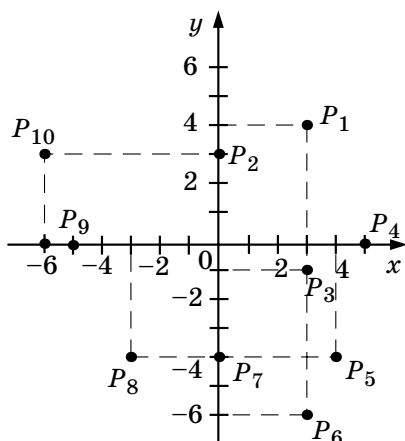


Рис. 5.36

- 1 а) Укажите координаты точек $P_1 - P_{10}$ на рис. 5.36.
б) Какие три точки на рис. 5.36 лежат на одной прямой? Назовите их координаты.
в) Назовите точки на рис. 5.36, лежащие в первой четверти, четвертой четверти.
- 2 Какие координаты имеет начало координат?
- 3 Дополните утверждение: абсцисса каждой точки оси Oy равна ...
- 4 Дополните утверждение: ордината каждой точки оси Ox равна ...



- 5 Назовите точку, являющуюся проекцией точки $(0; 6)$ на ось Ox .
- 6 Назовите точку, являющуюся проекцией точки $(-1; 0)$ на ось Oy .



- 7 Постройте у себя в тетради в декартовой системе координат точки: $A(2; 7)$; $B(-2; 7)$; $C(-7; 2)$; $D(-7; -2)$.
- 8 Рассмотрим точки $A(5; 2)$, $B(4; -3)$, $C(-4; 4)$ и $D(-3; -5)$. Запишите эти точки в порядке расположения их проекций: а) на ось Ox слева направо; б) на ось Oy снизу вверх.
- 9 Найдите координаты середины каждого из пяти отрезков на рис. 5.37.

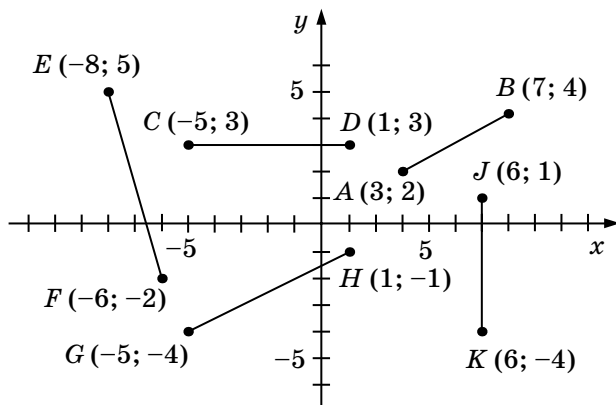


Рис. 5.37.

- 10** Найдите координаты середины отрезка, соединяющего следующие точки: а) $(6; 0)$ и $(10; 2)$; б) $(5; 7)$ и $(11; 17)$; в) $(12; 3)$ и $(3; 3)$; г) $(-5; 6)$ и $(6; -5)$; д) $(\sqrt{2}; -\sqrt{3})$ и $(\sqrt{18}; \sqrt{75})$; е) $(\frac{5}{4}; -\frac{5}{3})$ и $(\frac{3}{4}; \frac{2}{3})$; ж) $(a; 0)$ и $(0; b)$; з) $(a; b)$ и $(c; d)$
- 11** Определите, между какими из следующих пар точек расстояния меньше: $(3; 0)$ и $(7; 0)$ или $(3; 0)$ и $(-2; 9)$?
- 12** Расстояния между какими из следующих пар точек меньше: $(2; 1)$ и $(1; 2)$ или $(2; 1)$ и $(2; 0)$?
- 13** Найдите расстояние между точками: а) $(0; 0)$ и $(3; 4)$; б) $(0; 0)$ и $(3; -4)$; в) $(1; 2)$ и $(6; 14)$; г) $(8; 11)$ и $(15; 35)$; д) $(3; 8)$ и $(-5; -7)$; е) $(-2; 3)$ и $(-1; 4)$; ж) $(5; -1)$ и $(-3; -8)$; з) $(-6; 3)$ и $(4; -2)$.
- 14** Даны точки $P(-3; -4)$, $M(b; -1)$ и $Q(7; b)$. Найдите такое значение b , при котором M будет серединой отрезка PQ .
- 15** Даны точки $G(-5; 8)$, $K(2; a)$ и $H(b; 1)$. Найдите a и b , при которых точка K – середина отрезка GH .
- 16** Точка $M(3; -5)$ – середина отрезка AB . Вычислите координаты точки B , если координаты точки $A(2; -4)$.
- 17** Точки $A(5; -1)$, $B(1; 5)$ и $C(-3; 1)$ – вершины треугольника ABC . Вычислите длины его медиан.
- 18** Даны вершины четырехугольника $ABCD$: $A(0; 0)$, $B(5; 1)$, $C(7; 4)$, $D(2; 3)$. Докажите, что его диагонали имеют общую середину. Определите, является ли он параллелограммом. Ответ обоснуйте.

- 19** Постройте на координатной плоскости точки $A(0; 0)$, $B(5; 0)$, $C(5; 3)$, $D(0; 3)$. Соедините эти точки последовательными отрезками. Найдите периметр и площадь полученного четырёхугольника $ABCD$.
- 20** Постройте точки по заданным координатам: $P(0; 0)$, $Q(3; 0)$, $R(0; 4)$. Найдите: а) периметр треугольника PQR ; б) площадь этого треугольника.
- 21** На координатной плоскости постройте точки $F(0; 0)$, $G(8; 0)$, $H(8; -6)$.
а) Найдите площадь треугольника FGH .
б) Вычислите длину отрезка FH .
- 22** Известны координаты вершин треугольника ABC : $(0; 1)$, $(0; 6)$ и $(12; 1)$. Найдите площадь и периметр треугольника ABC .
- 23** Найдите площадь треугольника, вершинами которого служат точки $(0; 5)$, $(4; 0)$ и $(-4; 0)$.
- 24** Постройте точки $K(-2; 5)$, $M(-2; -3)$, $L(4; -3)$.
а) Найдите площадь треугольника KML .
б) Какую длину имеет отрезок KL ?
- 25** Прямые, проходящие через точку $P(5; 7)$ и перпендикулярные осям Ox и Oy образуют вместе с осями прямоугольник. Найдите его периметр.
- 26** Найдите периметр прямоугольника, образованного осями координат и перпендикулярами к ним, проходящими через точку $(-4; -2)$.
- 27** Постройте на координатной плоскости точки $A(-3; -4)$, $B(-3; 6)$ и $C(4; 6)$. Найдите координаты такой точки D , при которой четырёхугольник $ABCD$ – прямоугольник.
- 28** Концами основания равнобедренного треугольника служат точки $(3; 0)$ и $(-3; 0)$. Найдите координаты третьей вершины этого треугольника, если известно, что его площадь равна 15.
- 29** Даны координаты вершин четырёхугольника $A(3; -2)$, $B(-3; 4)$, $C(1; 8)$ и $D(7; 4)$. Точки M , X , Y и Z являются соответственно серединами отрезков AB , BC , CD и DA . Найдите: а) координаты точек M , X , Y и Z ; б) периметр четырёхугольника $MXYZ$.
- 30** Вершинами четырёхугольника $DTEG$ служат точки $D(4; -3)$, $T(7; 10)$, $F(-8; 2)$ и $G(-1; -5)$. Найдите длину его диагоналей.
- 31** Определите вид четырёхугольника $ABCD$ (параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат), если известны координаты его вершин:
а) $A(0; 8)$, $B(-6; 0)$, $C(2; -6)$, $D(8; 2)$
б) $A(0; 0)$, $B(1; 2)$, $C(2; 2)$, $D(1; 0)$
в) $A(2; 3)$, $B(3; 5)$, $C(4; 3)$, $D(3; 1)$
г) $A(1; 2)$, $B(2; 4)$, $C(6; 2)$, $D(5; 0)$.

- 32** Найдите координаты точки B (рис. 5.38), лежащей на отрезке AC , если $A(3; 15)$, $C(13; 0)$ и отношение AB к BC равно: а) 4; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{3}{2}$.

- 33** Даны точки $P(5; 2)$ и $R(20; 14)$. Найдите координаты точки Q , если она лежит между P и R и отношение PQ к QR равно: а) $\frac{1}{2}$; б) 2; в) $\frac{1}{3}$; г) 4.

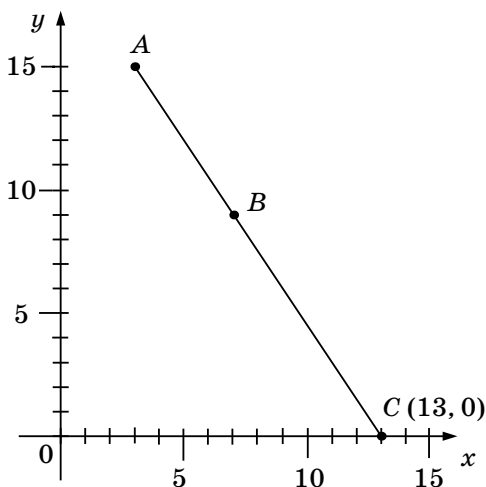


Рис. 5.38

- 34** Вершинами четырёхугольника $PQRS$ являются точки $P(2; 1)$, $Q(7; 4)$, $R(4; 9)$ и $S(-1; 6)$. Докажите, что диагонали этого четырёхугольника имеют общую середину и взаимно перпендикулярны.
- 35** На рис. 5.39 масштабы вдоль осей Ox и Oy в каждом случае специально выбраны различными, чтобы получился искажённый рисунок предполагаемой фигуры. Какую фигуру предполагалось рисовать в каждом случае?
- 35** Укажите все точки $A(x; y)$ координатной плоскости, для которых:
а) $x \geq 0$, $y < 0$; б) $x > 1$, $y \leq -1$; в) $x = 1$; г) $xy + 1 = x + y$; д) $x^2 + y^2 = 1$.

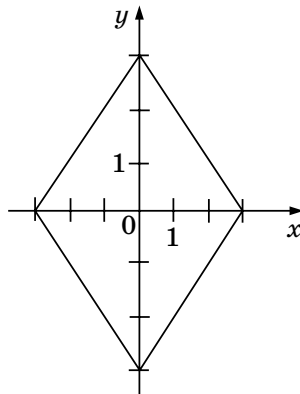
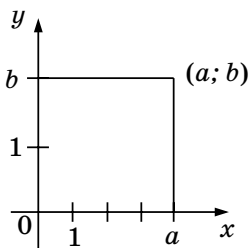
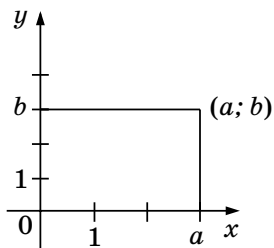


Рис. 5.39

- 37** Найдите все точки оси абсцисс, удалённые на расстояние, равное 5, от точки $A(14; 3)$.
- 38** Докажите, что треугольник с вершинами $A(2; 3)$, $B(-1; -1)$ и $C(3; -4)$ является равнобедренным.
- 39** Известны координаты вершин треугольника GHC : $G(0; 7)$, $H(5; -5)$ и $K(10; 7)$. Найдите длину высоты, проведённой к наименьшей стороне треугольника.
- 40** Даны вершины $M(-6; 0)$, $P(0; 6)$, $Q(2; -2)$ треугольника MPQ . Найдите периметр треугольника MPQ .
- 41** Найдите значение b , при котором треугольник с вершинами $(-6; 0)$, $(0; 6)$ и $(b; -b)$ является равносторонним.
- 42** Известны координаты вершин треугольника ABC : $A(2; 9)$, $B(7; -3)$, $C(12; 9)$. Найдите высоту, проведённую к наибольшей стороне.
- 43** Даны координаты вершин треугольника KLM : $K(-3; 3)$, $L(3; 9)$, $M(5; 1)$. Найдите: а) длину высоты, проведённой к наибольшей стороне; б) площадь треугольника.

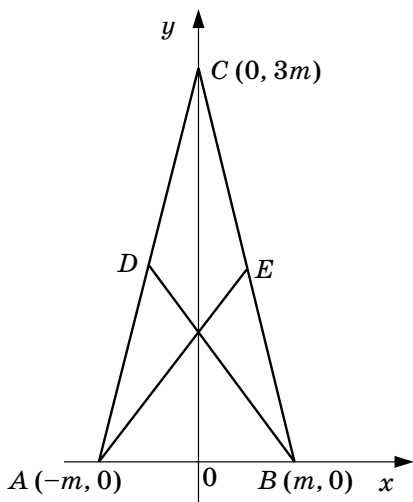


Рис. 5.40

- 44** Определите, при каком значении k треугольник, заданный координатами своих вершин: $(-8; -2)$, $(-2; 4)$, $(k; -k)$ является равносторонним.
- 45** Треугольник ABC задан координатами вершин $A(-m; 0)$, $B(m; 0)$ и $C(0; 3m)$. Докажите, что медианы AE и DB треугольника ABC (рис. 5.40) взаимно перпендикулярны.
- 46** Известны координаты двух вершин треугольника ABC : $A(-3; 2)$ и $B(5; 12)$. Прямая, проходящая через середину G стороны AB и параллельная стороне AC , пересекает сторону BC в точке $H(10; 2)$. Найдите координаты третьей вершины C .

- 47** Даны пять точек с целочисленными координатами. Докажите, что середина хотя бы одного из отрезков с концами в данных точках также имеет целочисленные координаты.

48 Используя только формулу расстояния между двумя точками, вычислите координаты ортоцентра H треугольника, заданного координатами своих вершин: $A(1; 1)$, $B(2; -3)$, $C(-1; 0)$.

49 Рассмотрим на координатной плоскости точки $A(-2; 5)$ и $B(4; -3)$. Найдите координаты точки M , если:

- M – середина отрезка AB ;
- M – точка на отрезке AB , такая, что $AM : MB = 1 : 2$;
- M – точка на прямой AB , такая, что $AM : MB = 1 : 2$;
- $AM = MB = 10$;
- $AM^2 + BM^2 = 50$.

50 Докажите следующие теоремы курса геометрии, используя метод координат:

- Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам (иными словами – имеют общую середину).
- Диагонали прямоугольника (рис. 5.41) имеют равные длины.
- Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника (рис. 5.42), параллелен третьей стороне, а его длина равна половине длины третьей стороны.
- Диагонали ромба перпендикулярны.
- Средняя линия трапеции параллельна её основанию, а длина средней линии равна полусумме длин оснований.
- Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции (рис. 5.43), параллелен основаниям, а его длина равна полуразности оснований.

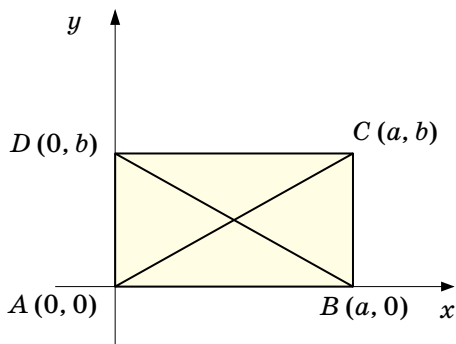


Рис. 5.41

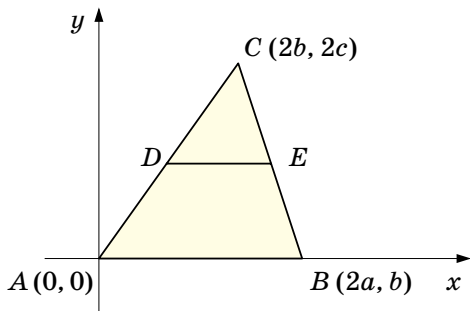


Рис. 5.42

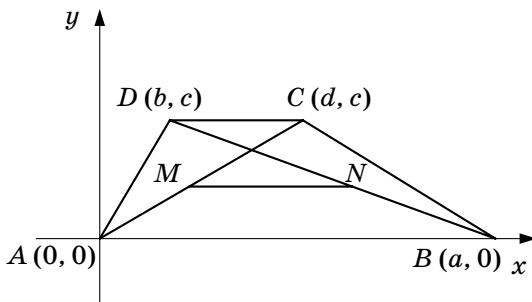


Рис. 5.43

ЗАДАЧИ К § 5.4

Н



- 51** Даны система декартовых координат и точка A в пространстве (рис. 5.44). Перечислите последовательность действий, позволяющих получить декартовы координаты точки A .
- 52** В декартовой системе координат (рис. 5.45) построены точка A и прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Ответьте на вопросы:
- Какими буквами обозначены начало координат и оси координат?
 - Как называются оси координат?
 - Как обозначаются координатные плоскости?
 - Назовите рёбра прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, которые лежат на координатных осях. Каким осям координат они принадлежат?
 - Какие координаты имеет точка A в данной системе координат?

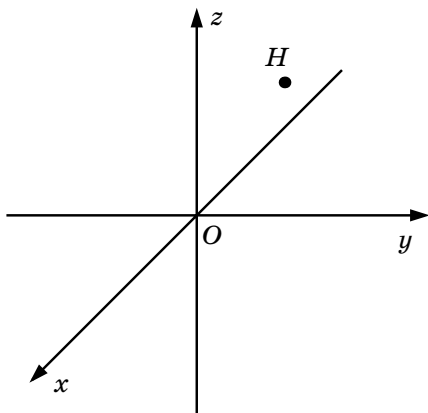


Рис. 5.44

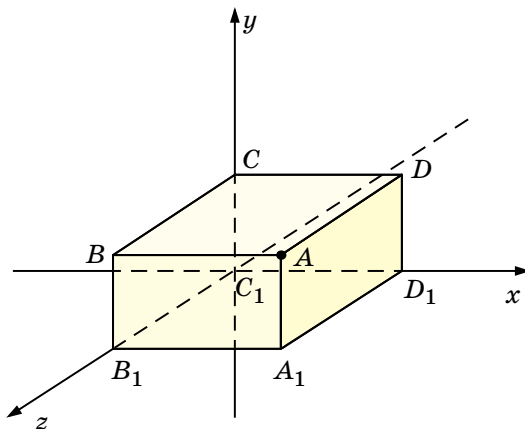


Рис. 5.45

- 53** Укажите координаты точек, изображённых на рис. 5.46.
- 54** Определите координаты середины отрезков AO , BO , CO , AB , BC и AC , изображённых на рис. 5.47.

Н



- 55** Даны три координаты точки в пространстве $(x_0; y_0; z_0)$. Как по этим координатам построить саму точку? Перечислите действия, которые необходимо выполнить, чтобы построить точку.

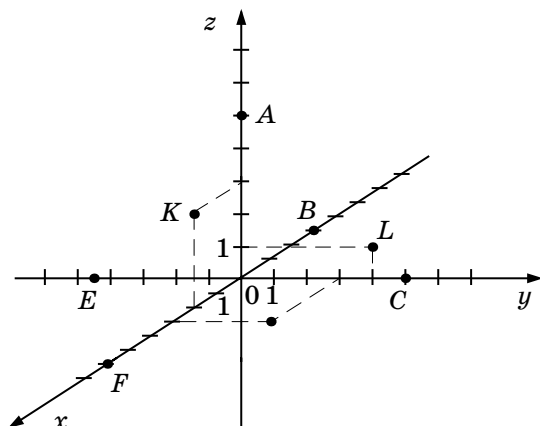


Рис. 5.46.

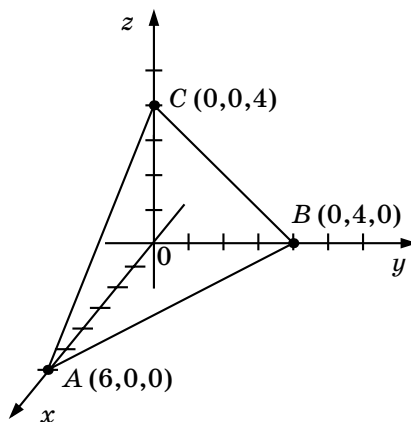


Рис. 5.47

56 Если координаты, любой точки P записывается в виде $P(x; y; z)$, то какой оси принадлежит каждая из точек: $A(0; 3; 0)$, $B(-2; 0; 0)$, $C(0; 0; 5)$?

57 Если координата любой точки P записывается в виде $P(x; y; z)$, то какой плоскости принадлежит каждая из следующих точек: $R(4; 0; 2)$, $S(3; -2; 0)$, $T(0; 1; 5)$?

58 На рисунке 5.48 плоскость E параллельна плоскости xOz , а плоскость P – плоскости yOz . Плоскости E и P пересекаются по прямой AB . Прямая CG лежит в плоскости E , а прямая CH – в плоскости F , и обе они лежат в плоскости xOy . Ответьте на вопросы:

- Какие координаты имеет точка C ?
- Какими условиями можно задать точку C ?

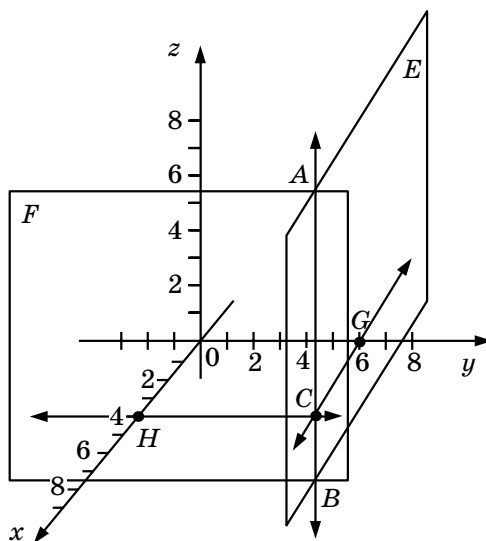


Рис. 5.48

59 Даны точки $A(0; 3; 2)$, $B(-1; 0; 0)$, $C(0; 0; 3)$, $D(0; -2; 0)$.

- Какие из этих точек лежат: а) на оси Ox ; б) на оси Oy ; в) на оси Oz ; г) на плоскости xOy ; д) на плоскости yOz .
- Постройте эти точки.

- 60** Постройте в декартовой системе координат точки $A(3; 0; 0)$, $B(0; -1; 0)$, $C(2; 2; 0)$, $D(-1; 0; 1)$, $E(1; 1; -1)$, $F(2; -1; 4)$.
- 61** Начертите треугольник ABC по данным вершинам $A(0; 4; 0)$, $B(1; 3; 5)$, $C(3; 2; 5)$. Как расположена сторона BC по отношению к плоскости xOy ?
- 62** Укажите особенность в расположении точек: а) $A(2; 3; 1)$ и $B(2; 3; -1)$; б) $A(2; 3; 1)$ и $B_1(2; -3; 1)$; в) $A(2; 3; 1)$ и $B_2(-2; -3; -1)$.
- 63** Найдите расстояние между точками P и Q , если:
а) $P(4; -1; -5)$ и $Q(7; 3; 7)$;
б) $P(0; 4; 5)$ и $Q(-6; 2; 3)$;
в) $P(3; 0; 7)$ и $Q(-1; 3; 7)$;
г) $P(-3; 4; -5)$ и $Q(6; -8; 3)$;
д) $P(1; 2; 3)$ и $Q(2; 3; 4)$.
- 64** Докажите, что расстояние между точками $P(x_1; y_1; z_1)$ и $Q(x_2; y_2; z_2)$ определяется по формуле $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.
- 65** Найдите расстояния от точки $M(2; 3; 1)$ до координатных плоскостей.
- 66** Дана точка $K(2; 3; 1)$. Укажите координаты оснований перпендикуляров, опущенных из этой точки на координатные плоскости.
- 67** Дана точка $P(2; 3; 1)$. Укажите координаты оснований перпендикуляров, опущенных из этой точки на координатные оси.
- 68** Найдите расстояние между точками $B(-2; 0; 3)$ и $K(3; 4; -2)$.
- 69** Определите, какая из точек – $A(2; 1; 5)$ или $B(-2; 1; 6)$ – лежит ближе к началу координат.
- 70** Даны точки $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 1)$, $C(3; 1; 2)$. Найдите периметр треугольника ABC .
- 71** Даны точки $K(0; 1; 1)$, $P(2; -1; 3)$, $T(-1; y; 0)$. Найдите такое значение y , при котором выполняется условие: $KT = PT$.
- 72** Являются ли точки $A(1; 2; 3)$, $B(2; 3; 4)$, $C(3; 4; 5)$ вершинами треугольника?
- 73** Даны точки $A(1; 2; 3)$ и $B(3; -6; 7)$. Найдите координаты середины отрезка AB .
- 74** Найдите координаты точки M , лежащей на оси y и равноудаленной от точек $A(4; -1; 3)$ и $B(1; 3; 0)$.

- 75** Найдите координаты точки M , лежащей в плоскости xOy и равноудалённой от точек $A(0; 1; -1)$, $B(-1; 0; 1)$, $C(0; -1; 0)$.
- 76** Найдите точки, равноудалённые от точек $A(0; 0; 1)$, $B(0; 1; 0)$, $C(1; 0; 0)$ и отстоящие от плоскости yOz на расстояние 2.
- 77** Докажите, что треугольник с вершинами $A(2; 0; 8)$, $B(8; -4; 6)$ и $C(-4; -2; 4)$ является равнобедренным.
- 78** Точки $A(1; 3; -1)$, $B(-2; 1; 0)$, $C(-1; 0; 1)$ – вершины параллелограмма $ABCD$. Вычислите координаты четвертой вершины D .
- 79** $A(1; 2; -1)$, $B(4; 0; 1)$, $C(1; -1; 0)$ – три вершины равнобедренной трапеции $ABCD$. Вычислите координаты вершины D , если $AB \parallel CD$.
- 80** На луче AB дана точка M такая, что $AM = 5$. Вычислите координаты точки M , если: а) $A(0; 0; 0)$, $B(2; 3; 1)$; б) $A(1; 1; -1)$, $B(0; -1; 3)$;
- 81** Докажите, что точки $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 0)$, $C(3; -4; 1)$ принадлежат одной прямой.
- 82** Даны точки: $A(2; -1; 1)$ и $B(-1; 1; -2)$. Вычислите координаты точки C , если $\overline{AC} : \overline{CB} = -2$.
- 83** Дан треугольник ABC . Прямая l пересекает прямые BC , CA , AB соответственно в точках A_1 , B_1 , C_1 . Докажите, что векторы $\overline{AB} + \overline{A_1B_1}$, $\overline{BC} + \overline{B_1C_1}$, $\overline{CA} + \overline{C_1A_1}$ коллинеарны.
- 84** Найдите точку, равноудалённую от точек $A(2; 3; 1)$ и $B(-2; 0; -1)$, если известно, что она лежит на оси Oz
- 85** Вычислите координаты точки, принадлежащей координатной оси Oy и одинаково удалённой от точек $A(2; -1; 1)$ и $B(0; 1; 8)$.
- 86** Даны точки: $A(-4; -4; 4)$, $B(-3; 2; 2)$, $C(2; 5; 1)$, $D(3; -2; 2)$. Докажите, что отрезки AC и BD перпендикулярны.
- 87** Вычислите расстояния от точки $M(3; 4; -1)$ до осей координат.
- 88** Даны точки $A(1; -2; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(-2; 0; 1)$. Вычислите координаты проекции точки C на прямую AB .
- 89** Вычислите расстояние между прямой AB и координатными осями, если: а) $A(3; 0; 1)$, $B(2; -1; 2)$; б) $A(2; 3; -1)$, $B(-1; 1; 1)$.
- 90** Вычислите косинусы углов треугольника ABC , если: а) $A(1; 1; 1)$, $B(2; 1; -1)$, $C(-3; 0; 2)$; б) $A(0; 0; 0)$, $B(2; -1; 1)$, $C(3; 0; -4)$.
- 91** Вычислите координаты M центра окружности, описанной вокруг треугольника ABC , если: а) $A(0; 1; 1)$, $B(-2; -1; 0)$, $C(1; 1; -3)$; б) $A(-1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 2)$.

- 92** Докажите, что треугольник ABC – прямоугольный, если $A(2; 4; 1)$, $B(11; -8; 1)$ и $C(2; 4; 21)$.
- 93** Даны точки $A(-1; 6; 0)$, $B(1; 4; 0)$ и $C(7; -2; 0)$. Найдите AB и BC . Докажите, что точка B лежит между точками A и C .
- 94** Докажите, что точка $E(-1; -2; 0)$ не лежит между точками $D(-4; -6; 0)$ и $F(3; 1; 0)$.
- 95** Одной из вершин прямоугольного параллелепипеда (рис. 5.49 а) является начало координат O , а вершины A , B и C лежат соответственно на осях Ox , Oy и Oz . Точка P' является проекцией вершины P на плоскость xOy . Найдите: а) OP' ; б) OP ; в) CP' .
- 96** Используя рис. 5.49 б:
 1) найдите AB , BC , AC , DC и AD ;
 2) докажите, что $AD^2 = (5 - 0)^2 + (8 + 4)^2 + (4 + 2)^2$.
- 97** Найдите расстояние от начала координат до точки $P(a; b; c)$. Изменится ли полученная формула, если числа a , b и c будут отрицательными?
- 98** На рис. 5.50 точка P' есть проекция точки $P(2; 3; 4)$ на плоскость xOy .
 а) Какие координаты имеет точка P' ?
 б) Чему равно расстояние от точки P до плоскости: а) xOy ; б) xOz ; в) yOz ?
 в) Чему равно расстояние от точки A до плоскости: а) xOy ; б) xOz ; в) yOz ?
- 99** а) Чему равно расстояние от точки $(3; 2; -2)$ до каждой из плоскостей:
 а) xOy ; б) xOz ; в) yOz ?
 б) Ответьте на первый вопрос задачи для точки $(x; y; z)$, где x , y , z – любые действительные числа.

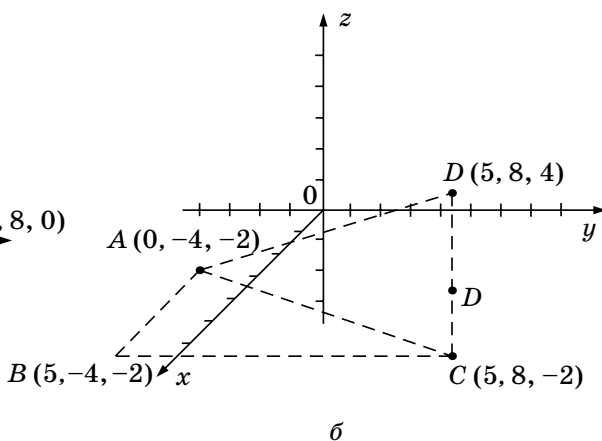
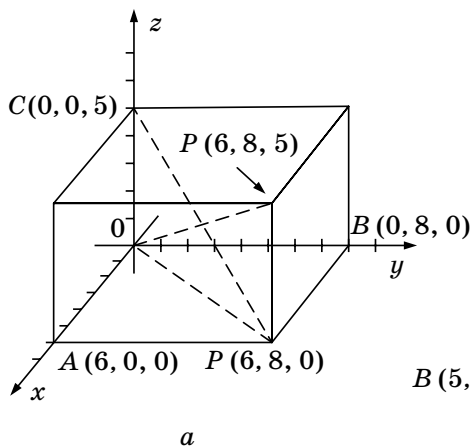


Рис. 5.49

- 100** Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$, изображённого на рис. 5.51.

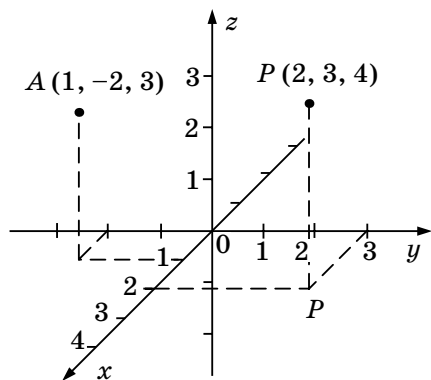


Рис. 5.50

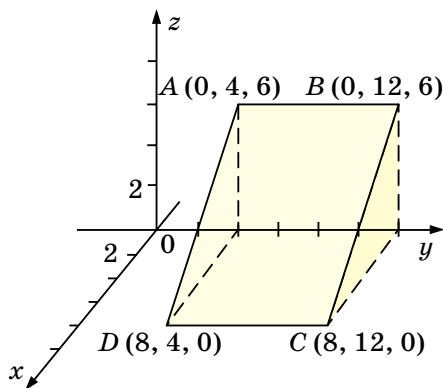


Рис. 5.51

- 101** Какую длину имеет проекция отрезка AC (рис. 5.51) на плоскость xOy ?

- 102** Используя данные рис. 5.52, вычислите длину BE .

- 103** Нарисуйте в тетради систему координат в пространстве. На осях Oy и Oz выберите один и тот же масштаб. На оси Ox возьмите масштаб, составляющий $0,7$ масштаба на двух других осях. Постройте точки $A(1; 3; 2)$ и $B(1; -3; 2)$. Проведите отрезок AB . Определите, чему равна его длина.

- 104** В пространстве даны девять точек с целочисленными координатами. Докажите, что хотя бы один из отрезков с концами в данных точках имеет середину с целочисленными координатами.

- 105** Определите координаты середины каждого из отрезков AO , BO , CO , AB , BC и AC , изображённых на рис. 5.53.

- 106** Докажите, что треугольник ABC с вершинами $A(3; 4; 1)$, $B(11; -8; 1)$ и $C(2; 4; 21)$ – прямоугольный.

- 107** На рис. 5.54 изображён прямоугольный параллелепипед. Найдите длины отрезков OD_1 , OD , CD_1 .

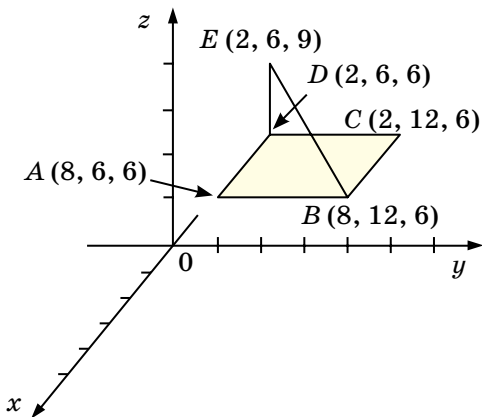


Рис. 5.52

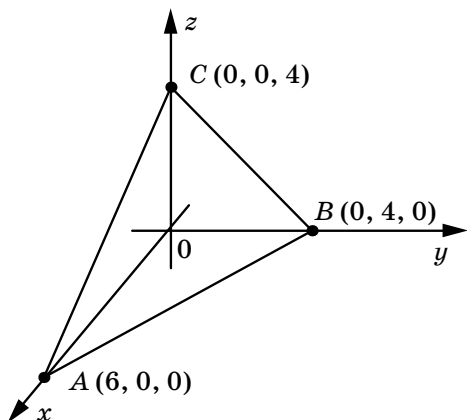


Рис. 5.53

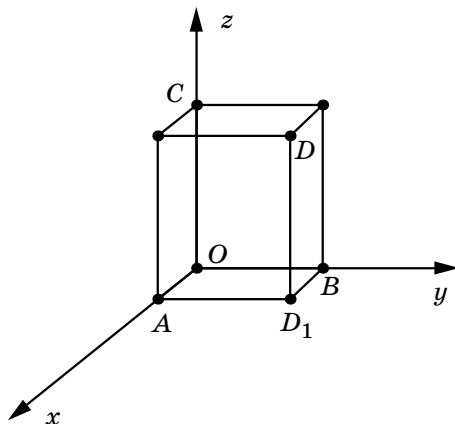


Рис. 5.54

ЗАДАЧИ К § 5.5

Н



- 108** Постройте фигуры, заданные следующими условиями: а) $x = 5$; б) $x < -2$; в) $y \geq 4$; г) $y = 0$.
- 109** Постройте множество точек, описываемых следующими условиями: а) $|x| = 2$; б) $|y| < 1$; в) $|x| \geq 3$.
- 110** Нарисуйте объединение фигур, заданных уравнениями $x = 3$ и $y = 2$. Какое они имеют пересечение?
- 111** Нарисуйте пересечение фигур, заданных следующими четырьмя условиями: $x \geq 0$; $x \leq 6$; $y \geq 0$; $y \leq 4$. Опишите это пересечение словами.

Н

- 112** Сформулируйте условия, описывающие область, изображённую на рис. 5.55.
- 113** Напишите уравнение для множества всех точек $P(x, y)$, равноудалённых от точек $A(0, 6)$ и $B(6, 0)$. Постройте соответствующую фигуру.
- 114** Напишите уравнение окружности, если дан её центр – точка Q и точка A на окружности: а) $Q(-1; 2)$, $A(0; 5)$; б) $Q(2; 0)$, $A(-1; -2)$; в) $Q(1; -2)$, $A(-1; 2)$.

115 Запишите уравнение прямой, проходящей через точку A и параллельной прямой l , если:

- а) $A(2; -3)$, уравнение прямой l имеет вид $y = 2x - 5$;
- б) $A(1; 1)$, уравнение прямой l имеет вид $y = -3x + 1$;
- в) $A(3; 0)$, уравнение прямой l имеет вид $3x - 2y = 0$.

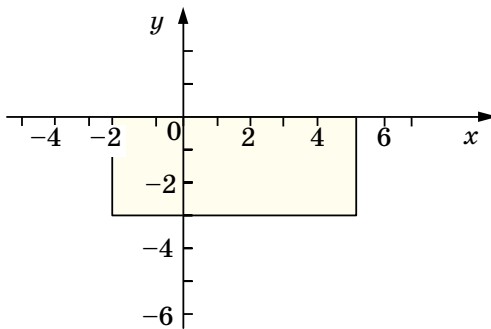


Рис. 5.55

116 Точка M принадлежит линии, задаваемой уравнением I, а точка K принадлежит линии, задаваемой уравнением II. Найдите наибольшее и наименьшее значения расстояния между точками M и K , если уравнения I и II имеют вид:

- | I | II |
|----------------------------------|--------------------------------|
| а) $x^2 + y^2 = 5$, | $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 1$; |
| б) $x^2 + y^2 - 2x = 0$, | $x^2 - 3x + y^2 + y = 100$; |
| в) $x^2 + y^2 - x + y = 0$, | $x^2 + y^2 + 2x - y - 1 = 0$; |
| г) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$ | $x^2 + y^2 - 3x - y - 5 = 0$. |

117 Определите вид линии, задаваемой уравнением:

- а) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$;
- б) $x^2 + y^2 - x - y + 1 = 0$;
- в) $x^2 + y^2 - 3x - 5y - 7 = 0$;
- г) $y - 1 = \sqrt{5 - x^2}$;
- д) $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 5x^2 - 5y^2 + 4 = 0$.

118 Составьте уравнение геометрического места точек, равноудалённых от двух данных точек $(0,0)$ и (a, b) .

119 Найдите точку пересечения прямых, заданных уравнениями:

- а) $5x - 7y - 20 = 0$ и $7x - 10y + 15 = 0$;
- б) $2x + 3y - 7 = 0$ и $4x + 6y + 11 = 0$;
- в) $2x - y = 0$ и $x + 0,5y = 0$.

120 Окружность радиуса 3 см касается двух параллельных прямых. Чему равно расстояние между этими прямыми?

121 Расстояние от вершины угла до точек касания его сторон с вписанной в него окружностью равно радиусу этой окружности. Чему равен данный угол?

- 122** Окружность с центром в точке $(-2, 4)$ касается оси x . В скольких точках эта окружность пересекает ось y ?
- 123** Окружность с центром в точке $(5, -3)$ касается оси y . В скольких точках эта окружность пересекает ось x ?
- 124** Даны прямоугольный треугольник с катетами a и b и окружность радиуса R с центром в вершине прямого угла этого треугольника. Пересекает ли окружность прямую, содержащую гипотенузу данного треугольника, если:
а) $a = 3, b = 4, R = 2,5$; б) $a = 20, b = 15, R = 12$; в) $a = 5, b = 12, R = 4$?

П

- 125** Нарисуйте в координатной плоскости xOy фигуру $y = |x|$.
- 126** Нарисуйте в координатной плоскости xOy фигуру $y = -|x|$.
- 127** Пусть даны точки $P(x, y), A(a, c), B(b, d)$. Какая фигура задаётся уравнением: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-c)^2} + \sqrt{(x-b)^2 + (y-d)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + (c-d)^2}$.
- 128** В прямоугольной системе координат нарисуйте множества всех точек $P(x, y)$, удовлетворяющих условиям:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2} = 5;$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2}.$$
- 129** Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; -1)$ параллельно прямой $y = 2x - 5$.
- 130** Дана прямая $y = kx + b$. Докажите, что для любых двух точек этой прямой $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2), x_1 \neq x_2$, выполняется равенство $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$.
- 131** Даны точки $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$. Составьте уравнение множества точек $M(x, y)$, для которых $|MA|^2 + |MB|^2 = k^2$. Дайте геометрическое истолкование полученному уравнению.
- 132** Даны точки $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$. Составьте уравнение множества точек $M(x, y)$, для которых $|MA|^2 - |MB|^2 = k^2$. Дайте геометрическое истолкование полученному уравнению.
- 133** Запишите условие того, что точки $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ принадлежат одной прямой.
- 134** Докажите с помощью метода координат, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

- 135** Найдите условие перпендикулярности двух прямых $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$.
- 136** Даны два отрезка AB и CD координатами своих концов $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$, $D(d_1, d_2)$. Запишите условие перпендикулярности этих отрезков.
- 137** Вычислите расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $y = kx + b$.
- 138** Докажите, что сумма квадратов расстояний всех вершин квадрата до прямой, проходящей через его центр, не зависит от выбора прямой.
- 139** Вычислите площадь треугольника ABC по заданным прямоугольным координатам его вершин: $A(1; 2)$, $B(2; 4)$, $C(-2; 5)$.
- 140** Определите вид треугольника по координатам его вершин (без чертежа): $A(-1; -2)$, $B(5; -2)$, $C(2; 3)$.
- 141** В квадрат вписана окружность радиуса R . Докажите, что сумма квадратов расстояний любой точки окружности до сторон квадрата постоянна и равна $6R^2$.
- 142** Даны параллелограмм $ABCD$ и точка M . Докажите, что величина выражения $MA^2 - MB^2 + MC^2 - MD^2$ не зависит от положения точки M .
- 143** Дан прямоугольник. Найдите множество всех точек плоскости, для каждой из которых сумма квадратов расстояний до концов одной диагонали прямоугольника равна сумме квадратов расстояний до концов его другой диагонали.
- 144** Даны две окружности: $x^2 + y^2 - 1 = 0$ и $x^2 + y^2 - x = 0$. Найдите координаты центров гомотетрии этих окружностей.
- 145** Составьте уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в точке $M(x_0, y_0)$.
- 146** Докажите, что $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$.
- 147** Составьте уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке $M(x_0, x_0^2)$.
- 148** Две касательные к параболе $y = x^2$ пересекаются в точке $M(a, b)$. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки касания.
- 149** Шесть точек A, B, C, D, E, F принадлежат параболе. Докажите, что если хорды AB и DE параллельны, а также BC и EF параллельны, то и хорды CD и FA также параллельны. Проверьте истинность этого результата для гиперболы $xy = p$.
- 150** На гиперболе $xy = 1$ даны три точки: $A(x_1, \frac{1}{x_1})$, $B(x_2, \frac{1}{x_2})$, $C(x_3, \frac{1}{x_3})$. Докажите, что точка H пересечения высот треугольника ABC принадлежит гиперболе.

- 151** Через вершины A, B, C треугольника ABC проведены три пары прямых: a_1 и a_2 , b_1 и b_2 , c_1 и c_2 , причём $a_1 \parallel b_1 \parallel c_1$, $a_2 \parallel b_2 \parallel c_2$. Докажите, что прямые, содержащие вторые диагонали образовавшихся параллелограммов с диагоналями BC, CA и AB , имеют только одну общую точку или параллельны.

Н

- 152** Составьте уравнение сферы с центром S и радиусом R , если:
а) $S(0; 0; 0)$, $R = \sqrt{2}$; б) $S(0; 2; -3)$, $R = 3$.
- 153** Найдите центр и радиус сферы, заданной уравнением: а) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$;
б) $(x-2)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 6$; в) $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z = 6$.
- 154** а) Найдите уравнение сферы с центром в точке $S(0; 0; 0)$, если известно, что она проходит через точку $M(2; -3; 0)$.
б) Составьте уравнение сферы с центром $S(5; -3; 7)$, проходящей через точку $A(2; 1; 6)$.
- 155** Составьте уравнение сферы единичного радиуса, если известно, что она проходит через точки $O(0; 0; 0)$, $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$.
- 156** а) Составьте уравнение сферы с радиусом, равным $\sqrt{5}$, если известно, что центр сферы принадлежит плоскости xOy и сфера проходит через начало координат и точку $M(-2; 0; 2)$.
б) Составьте уравнение сферы с радиусом 3, если известно, что центр сферы принадлежит оси Oy и сфера проходит через точку $M(-2; -1; -2)$.
- 157** Дана сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 169$. Через начало координат O и точку $P(1; 2; 4)$ проведена прямая l . Найдите координаты точек пересечения прямой l со сферой.
- 158** Прямая задана точками $A(1; 2; -1)$, $B(3; 0; 2)$. Найдите координаты точек пересечения AB со сферой $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = \frac{17}{4}$.
- 159** Дана сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Через точки $S(0; 0; R)$, $A_1(a; b; 0)$ проведена прямая l , пересекающая сферу в точке A . Найдите координаты точки A .
- 160** Сечения сферы радиусом R двумя параллельными плоскостями имеют радиусы R_1 и R_2 . Найдите расстояние между этими плоскостями.
- 161** Плоскость, проходящая через точку M , принадлежащую сфере радиусом R , составляет с радиусом, проведённым в эту точку, угол φ . Найдите радиус сечения.

- 162** Через точку $M(3; 4; 12)$, принадлежащую сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, проведены плоскости, перпендикулярные осям координат. Вычислите радиусы сечений.
- 163** Внутри сферы даны точки A и B . Проведите через эти точки плоскость, пересекающую сферу по окружности наименьшего радиуса.
- 164** Дана сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Составьте уравнение: а) плоскости α , которая касается сферы в точке $M(1; -2; -2)$; б) плоскости β , которая касается данной сферы и параллельна касательной плоскости α (но не совпадает с ней).
- 165** Дана сфера $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. Из точки $P(x_0; y_0; z_0)$, лежащей вне шара, ограниченного сферой, проведена к ней касательная, T – точка касания. Вычислите PT .
- 166** Запишите условие того, что две сферы $(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 = R_1^2$, $(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (z-c_2)^2 = R_2^2$ касаются.
- 167** Сфера $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ проходит через начало координат. Докажите, что уравнение касательной плоскости к сфере в начале координат имеет вид $ax + by + cz = 0$.
- 168** Даны шесть точек: $A(a; b; c)$, $B(a; c; b)$, $C(b; c; a)$, $O(b; a; c)$, $E(c; a; b)$, $P(c; b; a)$. Докажите, что эти точки принадлежат одной окружности, причём ACE и BDF – равносторонние треугольники.
- 169** Даны две точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $A_2(x_2; y_2; z_2)$. Найдите множество точек $M(x; y; z)$, для которых $MA_1 : MA_2 = k$, где k – данное положительное число.
- 170** Даны две непересекающиеся сферы. Докажите, что множество всех точек M , таких, что длины отрезков MT_1 и MT_2 , касательных к данным сферам (T_1 и T_2 – точки касания), имеют данное отношение, есть сфера.
- 171** Даны две точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $A_2(x_2; y_2; z_2)$. Найдите множество всех точек $M(x; y; z)$ таких, что $k \cdot (MA_1)^2 + l \cdot (MA_2)^2 = d^2$, где k , l и d – данные числа.
- 172** Составьте уравнение сферы δ , проходящей через точки $O(0; 0; 0)$, $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$. Докажите, что прямая l , проведённая через начало координат O перпендикулярно к плоскости ABC , пересекает эту плоскость и сферу δ соответственно в таких точках M и N , что $OM : ON = 1:3$.
- 173** В сферу вписан прямоугольный параллелепипед. Докажите, что для любой точки сферы одно из трёх произведений её расстояний до противоположных граней параллелепипеда равно сумме двух других.

- 174** Составьте уравнение множества всех точек, удалённых от координатной плоскости yOz на данное расстояние d .
- 175** Составьте уравнение множества всех точек, равноудалённых от двух координатных плоскостей xOy и xOz .
- 176** Составьте уравнение множества всех точек, находящихся от оси Ox на расстоянии d .
- 177** Даны две точки A и B . Составьте уравнение множества всех точек M , для которых $\angle AMB = 90^\circ$, если: а) $A(2; 0; 1)$, $B(-2; 4; 1)$; б) $A(-1; 2; 0)$, $B(1; 0; 4)$.
- 178** Составьте уравнение множества всех точек M , для которых $\angle(\overline{OM}, \bar{k})$ равен 45° .
- 179** Определите, какое множество точек задаётся уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 0$.
- 180** Выясните, какие множества точек задаются уравнениями: а) $x^2 + y^2 = 0$; б) $x^2 - xy = 0$; в) $y^2 + z^2 = 1$; г) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.
- 181** Определите, какие множества точек задаются неравенствами: а) $x > 0$; б) $yz > 0$; в) $y^2 + z^2 - 1 > 0$.
- 182** Найдите угловой коэффициент прямой: а) $2x - y + 3 = 0$; б) $4x + 4y - 5 = 0$; в) $y = 5x - 7$; г) $y = x$; д) $y = 5$.
- 183** Постройте прямую, заданную уравнением: а) $x = 2$; б) $y = 3$; в) $y = 0,5x$; г) $y = x$; д) $y = -x$; е) $2x + 3y = 0$.
- 184** Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $A(4; 2)$.
- 185** Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(2; 3)$ и $B(4; -1)$.
- 186** Определите, проходит ли прямая, заданная уравнением $6x - 5y - 10 = 0$, через точку $C(-5; -8)$.
- 187** Найдите точки пересечения прямой $4x + 3y - 6 = 0$ с осями координат. Постройте эту прямую.
- 188** Запишите уравнение прямой, параллельной оси y и проходящей через точку $M(2; 5)$.
- 189** Прямые заданы уравнениями $4x + 5y + 10 = 0$ и $x + 4y - 3 = 0$. Найдите координаты точки их пересечения.

- 190** Прямая и окружность заданы уравнениями $2x + 3y - 16 = 0$ и $x^2 + y^2 = 20$. Пересекаются ли они?
- 191** Определите, параллельны ли прямые, заданные уравнениями:
а) $4x + 4y = 5$ и $y = x + 1$; б) $4x + 4y = 5$ и $y = -2 - x$.
- 192** Найдите периметр треугольника, отсекаемого от координатной четверти прямой, заданной уравнением $4x + 3y - 24 = 0$.
- 193** Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $A(-1; 0)$, $B(1; 4)$ и $C(1; -4)$. Найдите её радиус и координаты центра.

ЗАДАЧИ К § 5.6

Н

- 194** Среди векторов $\vec{a_1} = (1; -6; 3)$, $\vec{a_2} = (0; -4; 5)$, $\vec{a_3} = (3; 0; 0)$, $\vec{a_4} = (0; -1; 0)$, $\vec{a_5} = (5; 0; 6)$, $\vec{a_6} = (2; -3; 6)$, $\vec{a_7} = (0; 0; -2)$, $\vec{a_8} = (-3; 1; 0)$, $\vec{a_9} = (6; 0; 1)$, $\vec{a_{10}} = (0; 5; 0)$ укажите векторы, коллинеарные: а) вектору $\vec{i}$; б) вектору $\vec{j}$; в) вектору $\vec{k}$; компланарные: г) векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$; д) векторам $\vec{j}$ и $\vec{k}$; е) векторам $\vec{i}$ и $\vec{k}$.
- 195** Докажите, что векторы $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (-4; -6; 2)$, $\vec{c} = (-2; -3; 1)$ коллинеарны.
- 196** Докажите, что векторы $\vec{a} = (2; 1; 1)$, $\vec{b} = (3; -1; 2)$, $\vec{c} = (9; 2; 5)$ компланарны.
- 197** Докажите, что векторы $\vec{a} = (2; 1; 1)$, $\vec{b} = (3; -1; 0)$, $\vec{c} = (7; 1; 2)$ компланарны, и вычислите коэффициенты разложения вектора $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
- 198** Вектор $\vec{a}$ образует с векторами $\vec{i}$ и $\vec{k}$ соответственно углы 120° и 135° . Определите угол, который образует вектор $\vec{a}$ с вектором $\vec{j}$.
- 199** Найдите косинусы углов, образованных вектором $\vec{a} = (5; -\sqrt{2}; 3)$ с координатными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
- 200** При каких значениях параметра m угол между векторами $\vec{a} = (0; m; -2)$ и $\vec{b} = (-1; 0; -1)$ равен 60° ?

201 Даны векторы $\vec{a} = (1; 5; 1)$, $\vec{b} = (1; -5; 2)$, $\vec{c} = (2; 1; \frac{3}{2})$, $\vec{d} = (0; 0; 1)$.

Вычислите их попарные скалярные произведения и установите, образуют ли они острый, прямой или тупой угол.

202 Вычислите координаты единичного вектора $\vec{a}_0$, перпендикулярного векторам $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (0; 1; 1)$.

ЗАДАЧИ К § 5.7

Н

203 Точка $A(2; 1; m)$ принадлежит плоскости $3x - y + 2z - 1 = 0$. Найдите m .

204 Даны плоскости $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Докажите, что условие $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$, $c_1 = kc_2$ является необходимым и достаточным для того, чтобы данные плоскости были параллельны или совпадали.

205 Найдите уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка, соединяющего точки $A(2; 1; 3)$ и $B(0; -1; 1)$, и перпендикулярной к этому отрезку.

206 Точка $A(1; m; n)$ принадлежит прямой, по которой пересекаются плоскости $x + y - z - 4 = 0$, $2x - y + 4z - 1 = 0$. Найдите m и n .

207 Даны две точки $A(1; 3; m)$ и $B(-2; m; 1)$ и плоскость $3x + 4y - z - 1 = 0$. При каких значениях m прямая AB параллельна плоскости?

208 Найдите координаты вектора $\vec{a}$, параллельного прямой пересечения плоскостей $3x - y - z + 2 = 0$, $x + z - 1 = 0$.

209 Найдите уравнение плоскости, параллельной плоскости, задаваемой уравнением $4x - 5y + 2z + 11 = 0$ и проходящей через точку $A(3; -2; -4)$.

210 Докажите, что точки $A(2; 3; -4)$ и $B(1; -4; 1)$ лежат по разные стороны от плоскости $2x - y + z + 1 = 0$.

211 Дана плоскость $x - y + 2z - 3 = 0$ и две точки $A(1; 1; -1)$, $B(-1; 0; 0)$. Докажите, что луч AB пересекает плоскость.

212 Выясните, имеют ли указанные четыре плоскости общую точку:

а) $x + y = 0$, $z - 1 = 0$, $x - z + 2 = 0$, $2x + y + 1 = 0$;

б) $x - y = 0$, $2z + 1 = 0$, $y + z - 1 = 0$, $2x - y + 2z + 1 = 0$.

- 213** Даны плоскости $x + 2y - z - 1 = 0$ и $2x + y + z = 0$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; 1; -1)$ и прямую пересечения данных плоскостей.
- 214** Прямая l пересекает координатные плоскости Oxz и Oyz соответственно в точках $A(2; 0; -1)$, $B(0; 2; 4)$. Найдите координаты точки пересечения прямой l с третьей координатной плоскостью.
- 215** Найдите координаты точек пересечения прямой AB с координатными плоскостями, если:
а) $A(1; 1; -4)$, $B(-2; 3; 1)$; б) $A(1; 2; 1)$, $B(-2; -3; -1)$.
- 216** Докажите, что точки $A(1; 1; 1)$, $B(2; -1; 1)$, $C(3; 4; -1)$, $D(4; 0; -\frac{3}{7})$ принадлежат одной плоскости.

П

- 217** Через точку $M(1; -1; 2)$ проведите плоскость, перпендикулярную прямой пересечения плоскостей $3x - y - z - 1 = 0$, $2x + y + 3z + 4 = 0$.
- 218** Вычислите расстояние от точки $A(2; 1; 1)$ до прямой пересечения плоскостей $3x + y - z = 2$, $x - y = 0$.
- 219** Даны точка $M(1; 2; -4)$ и плоскость $y - z = 0$. Вычислите координаты точки M_1 , симметричной точке M относительно данной плоскости.
- 220** В плоскости $3x - y - z + 1 = 0$ дан квадрат $ABCD$. Вычислите координаты вершин B и D , если $A(2; 4; 3)$, $C(1; 1; 3)$.
- 221** Сфера проходит через точку $M(4; 3; 6)$ и касается координатных плоскостей. Составьте уравнение этой сферы.
- 222** Дан тетраэдр $SABC$ с прямым трёхгранным углом S . Найдите множество точек P , для которых $PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PS^2$.
- 223** Дано изображение осей координат Ox , Oy , Oz . Постройте изображения следов плоскостей 1) $3x - 4y + 6z - 12 = 0$; 2) $x + y - 2z + 6 = 0$ на координатных плоскостях.
- 224** Дано изображение осей координат Ox , Oy , Oz . Постройте изображение прямой пересечения плоскостей $3x - y + z - 6 = 0$ и $2x + y - z + 4 = 0$.
- 225** Постройте изображение точки пересечения прямой, проходящей через точки $A(1; -1; 2)$ и $B(0; -4; 1)$ с плоскостью $2x + y + z - 6 = 0$.

- 226** Постройте изображение плоскости, проходящей через точку $A(1; 2; -1)$ параллельно плоскости Oxy .
- 227** Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; -2; 2)$, если задано уравнение $x + 2y - 1 = 0$ её следа в плоскости Oxy .
- 228** Составьте уравнение плоскости, если заданы уравнения её следов в плоскостях Oxy и Oxz :
а) $x + y - 2 = 0$, $2x - z - 4 = 0$; б) $x - y - 1 = 0$, $3x + 2z - 3 = 0$.
- 229** Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; 0; -2)$ и $B(0; 3; 1)$ параллельно оси Oz .
- 230** Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; -1; 1)$ и $B(2; 0; -1)$ параллельно направлению вектора $\vec{a} = (3; 1; -1)$.
- 231** Даны четыре точки: $A(1; 1; 1)$, $B(2; -1; 0)$, $C(-1; 0; 1)$, $D(-2; 1; 1)$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую CD параллельно прямой AB .

ГЛАВА 6

ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ

Сравнение математических фигур и величин служит материалом для игр и обучения мудрости.

*Иоганн Генрих Песталоцци,
(швейцарский педагог, 1746–1827)*

§ 6.1



ОБЩЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБ ОБЪЁМЕ. ОБЪЁМЫ КУБА И ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

В учебнике геометрии для 7–9 классов есть § 11.7 «Знакомство с объёмами фигур», где было обсуждено понятие объёма геометрической фигуры и рассмотрены некоторые свойства объёмов.

Интересно, что об объёмах фигур мы больше говорили в начальной школе, чем во всех предыдущих главах курса геометрии. Дело в том, что наглядно понятие объёма и простейшие способы вычисления объёмов понятны, а вот для построения теории объёмов надо многое знать. В этой главе мы изложим один из вариантов этой теории (хотя, как вы увидите, она будет далека от полной математической строгости, которая требует специальных знаний и времени).

Каждая фигура в пространстве занимает часть пространства: здание – больше, чем кирпич; куб с ребром 1 м – больше куба с ребром 1 см. Поэтому для сравнения пространственных фигур (тел) вводят понятие объём.

Нам нужно получить ответы на непростые вопросы.



Всякая ли фигура имеет объём? Как можно определить объём?

Сначала рассмотрим понятие кубической фигуры.

Для начала разобьём пространство на равные примыкающие друг к другу кубы. Такое разбиение удобно называть специальным термином – кубильяж.

Дадим теперь точную трактовку понятия кубической фигуры и понятия объёма.

1. Рассмотрим кубильяж, у которого длина рёбер кубов равна $\frac{1}{10^k}$.

2. Пусть пространственная фигура F содержит фигуру, составленную из a_k кубов этого кубильяжа, и содержится в фигуре, составленной из b_k таких кубов.

3. Тогда $\frac{a_k}{10^{3k}}$ есть значение объёма фигуры F с недостатком, а $\frac{b_k}{10^{3k}}$ – с избытком.

4. Если фигура F такова, что пределы $\bar{V}(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{10^{3k}}, \underline{V}(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k}{10^{3k}}$ совпадают, то фигура F называется кубируемой, а число $\bar{V}(F) = \underline{V}(F)$ называется объёмом фигуры F и обозначается через $V(F)$. Объём V представляет собой функцию, заданную на множестве всех кубируемых фигур и принимающую числовые значения.

Как и площадь, объём по-другому может быть определён аксиоматически, причём аксиомы, на которых основывается понятие объёма, совершенно аналогичны аксиомам площади:

1) функция V неотрицательна, т.е. $V(F) > 0$ для любой кубируемой фигуры F ;

2) функция V аддитивна, т.е. если F_1 и F_2 – кубируемые фигуры, не имеющие общих внутренних точек, то $V(F_1 \cup F_2) = V(F_1) + V(F_2)$;

3) функция V инвариантна относительно изометрий, т.е. если $F_1 = F_2$, то $V(F_1) = V(F_2)$;

4) единичный куб (т.е. куб, ребро которого имеет длину 1) имеет объём 1.

Всё сказанное можно изложить очень кратко и просто следующим образом: Объём – это количественная характеристика фигуры, удовлетворяющая следующим условиям (свойства объёма).

1. Каждая фигура имеет определённый объём, выраженный положительным числом.

2. Равные фигуры имеют равные объёмы.

3. Если фигура разбита на несколько частей, то её объём равен сумме объёмов всех этих частей.

Объём – одна из величин, как и длина, площадь, мера угла. Значение объёма задается не только числом, но и наименованием. Например, объём 1 дм^3 можно представить как 1000 см^3 и как $0,001 \text{ м}^3$. За единицу длины принимают длину некоторого единичного отрезка и в зависимости от неё вводят единицы площади и объёма. Площадь квадрата, сторона которого равна единичному отрезку, – единица площади, а объём куба, ребро которого равно единичному отрезку, – единица объёма. При таком соглашении наименований можно не писать.

В этой главе мы будем говорить об объёмах многогранников: куба, прямоугольного параллелепипеда, призмы, пирамиды, и т.д.

Сейчас мы докажем чрезвычайно важную теорему об объёме прямоугольного параллелепипеда:

Теорема 33. Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.

Доказательство

При доказательстве теоремы разберём три возможных случая.

Случай I.

1. В прямоугольном параллелепипеде три измерения выражаются целыми числами a, b, c (в одних и тех же линейных единицах) (рис. 6.1) (дано).

2. $V = abc$, где V – объём данного параллелепипеда, a, b, c – его измерения (требуется доказать).

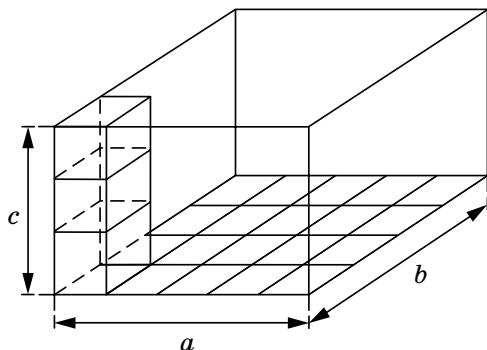


Рис. 6.1

3. Длина сторон основания данного параллелепипеда выражается целыми числами a и b ; следовательно, это основание можно разбить на ab квадратов.

4. На каждый из этих ab квадратов можно поместить куб в одну кубическую единицу. Получаем слой высотой в одну линейную единицу, содержащий ab кубических единиц.

5. Таких слоёв во всём данном параллелепипеде будет содержаться c , так как высота равна c линейным единицам.

6. Объём данного параллелепипеда $V = abc$.

Случай II.

1. В прямоугольном параллелепипеде три измерения выражаются рациональными числами a, b, c (дано).

2. $V = abc$ (требуется доказать).

3. Приведём данные рациональные числа к общему знаменателю, получим $a = \frac{p}{n}$, $b = \frac{q}{n}$, $c = \frac{r}{n}$ (1).

4. Примем за новую единицу длины $\frac{1}{n}$ часть прежней. Три измерения данного прямоугольного параллелепипеда в новых единицах выразятся целыми числами p, q, r (1, 3).

5. Так как p, q, r – числа целые, то объём прямоугольного параллелепипеда будет равен pqr новых кубических единиц (4, случай 1).

6. Прежняя кубическая единица будет содержать n^3 новых кубических единиц (4, свойство единицы объёма).

7. Объём, равный в новых кубических единицах pqr , выразится в прежних кубических единицах числом, в n^3 раз меньшим, т.е. будет равен $\frac{pqr}{n^3} =$

$= \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} \cdot \frac{r}{n}$ прежних кубических единиц (4, 5, 6).

8. Так как $\frac{p}{n} = a$, $\frac{q}{n} = b$, $\frac{r}{n} = c$, то и в этом случае $V = abc$.

Случай III.

1. В прямоугольном параллелепипеде длины трёх измерений a , b и c (или некоторые из них) несоизмеримы с единицей длины, т.е. a , b и c – иррациональные числа (дано).

2. $V = abc$ (требуется доказать).

3. Так как отрезки AB , MA и AD (рис. 6.2) несоизмеримы с единицей длины (например, l), то их отношения к этой единице длины, т.е. $\frac{AB}{l} = b$, $\frac{AM}{l} = c$, $\frac{AD}{l} = a$, не могут быть выражены рациональными числами. В таком случае числа a , b и c могут быть приближённо выражены рациональными числами с любой степенью точности (1, свойства иррациональных чисел).

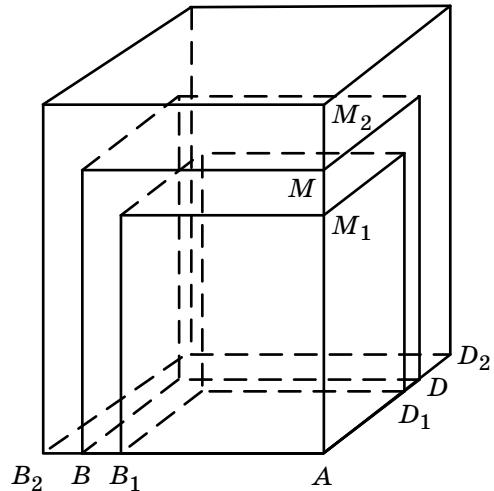


Рис. 6.2

4. Отложим на стороне основания AD данного параллелепипеда отрезки AD_1 и AD_2 так, чтобы их длина была соответственно равна $\frac{p}{10^n}$ и $\frac{p+1}{10^n}$, на стороне AB – отрезки AB_1 и AB_2 , длина которых соответственно равна $\frac{q}{10^n}$ и $\frac{q+1}{10^n}$, и на высоте параллелепипеда AM – отрезки AM_1 и AM_2 , длина которых соответственно равна $\frac{r}{10^n}$ и $\frac{r+1}{10^n}$, где $\frac{p}{10^n}$, $\frac{q}{10^n}$, $\frac{r}{10^n}$ – приближённые значения a , b , c с недостатком, а $\frac{p+1}{10^n}$, $\frac{q+1}{10^n}$, $\frac{r+1}{10^n}$ приближённые значения a , b , c с избытком, вычисленные с точностью до $\frac{1}{10^n}$ (построения) (рис. 6.2).

5. $V_1 = \frac{p}{10^n} \cdot \frac{q}{10^n} \cdot \frac{r}{10^n}$ и $V_2 = \frac{p+1}{10^n} \cdot \frac{q+1}{10^n} \cdot \frac{r+1}{10^n}$ и $V_1 \leq V \leq V_2$ (1, 3, 4, случай 2, свойства объёма).

6. Если неограниченно увеличивать число n , то $\frac{p}{10^n}$ и $\frac{p+1}{10^n}$ будут стремиться к своему пределу, иррациональному числу a , $\frac{q}{10^n}$ и $\frac{q+1}{10^n}$ к своему

пределу b , $\frac{r}{10^n}$ и $\frac{r+1}{10^n}$ – к своему пределу c (4, свойства иррациональных чисел, свойства предела).

7. Так как предел произведения равен произведению пределов, то пределы выражений $\frac{p}{10^n} \cdot \frac{q}{10^n} \cdot \frac{r}{10^n}$ и $\frac{p+1}{10^n} \cdot \frac{q+1}{10^n} \cdot \frac{r+1}{10^n}$ оба равны abc .

8. Этот общий предел указанных произведений и принимается за числовое выражение объёма прямоугольного параллелепипеда, т.е. и здесь $V = abc$.

Следовательно, во всех случаях объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений, или $V = abc$. ■

Из доказанной теоремы можно вывести следующие следствия.

Следствие 1. Любую грань прямоугольного параллелепипеда можно принять за основание; тогда сторонами его основания будут соответствующие два измерения, а высотой – третье измерение. Следовательно, объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту.

Следствие 2. Объём куба, ребро которого равно a , равен a^3 , т.е. $V_{\text{куба}} = a^3$.

§ 6.2

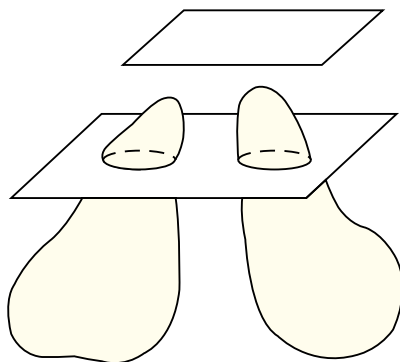


ПРИНЦИП КАВАЛЬЕРИ

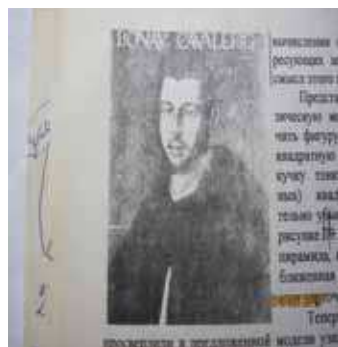
Чаще всего подходы к вычислению объёмов связаны с переходом к пределу. Этими вопросами занимается раздел математики, называемый математическим анализом. В школе изучаются элементы математического анализа, которых часто недостаточно для строгого построения теории объёмов. Но даже у владеющих в достаточной мере элементами математиче-

ского анализа при их применении к теории объёмов возникает много трудностей и тонких мест, с которыми разбираться очень непросто.

Вот почему мы пойдём несколько другим путём. Мы воспользуемся результатами, полученными итальянским математиком Бонавентурой Кавальери (1598–1647), учеником Галилея, который сформулировал принцип, применимый для вычисления объёмов всех интересующих нас фигур. Поясним смысл этого принципа, который носит название принцип Кавальери.



Представим себе такую физическую модель: можно получить фигуру, очень похожую на пирамиду, основанием которой является квадрат, сложив кучку тонких (скажем картонных) квадратиков последовательно убывающих размеров. На рис. 6.3а изображена настоящая, «точная» пирамида, а на рис. 6.3б – её «приближённая модель» из квадратных карточек.



Теперь допустим, что мы просверлили в предложенной модели узкое отверстие, ведущее от вершины к некоторой точке основания, и вставили в него стержень так, чтобы он пробивал каждую квадратную пластинку. Мы можем тогда, не меняя положения нижнего конца стержня на основании «пирамиды», наклонить стержень. Форма модели тогда изменится, но её объём останется прежним. Дело в том, что объём нашей «пирамиды» – это просто общий объём всех квадратных пластинок, а этот общий объём не меняется, когда пластинки скользят одна по другой.

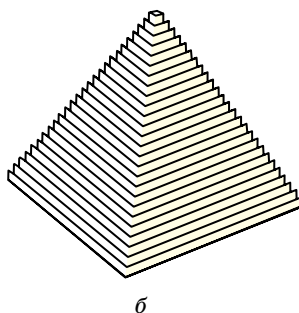
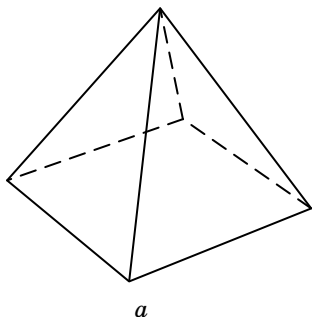


Рис. 6.3

Тот же принцип применим и в более общей ситуации.

Допустим, что мы имеем две фигуры, основания которых лежат в одной плоскости. Можно считать, что эта плоскость горизонтальна (рис. 6.4).

Если все горизонтальные поперечные сечения двух наших фигур, находящиеся на одном и том же уровне, имеют одну и ту же, площадь, то две наши фигуры имеют один и тот же объём (рис. 6.4).

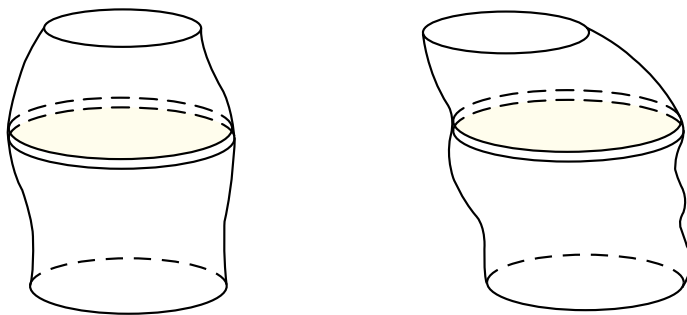


Рис. 6.4

Это верно по следующей причине. Снова сделаем модель каждого из наших тел, сложив его из плоских (например, вырезанных из картона) пластинок (разумеется, теперь уже не квадратных). Мы будем считать, что все пластинки имеют одну и ту же (весьма малую!) толщину. Тогда каждая пластинка, входящая в модель первого тела, имеет в точности тот же объём, что и соответствующая пластинка во второй модели. Так как пластинки мы условились брать очень тонкие, то наши модели будут очень близки к данным телам. Фактически, взяв достаточно тонкие пластинки, мы можем сделать модели сколь угодно близкими к этим телам. Следовательно, объёмы этих тел совпадают.

Принцип, который иллюстрируется рисунком 6.4, и называется принципом Кавальери.

Принцип Кавальери мы принимаем как еще одно основное свойство измерения объёмов (можно это свойство считать аксиомой геометрии).



Пусть нам даны две фигуры F_1 и F_2 и плоскость α . Если каждая плоскость, параллельная плоскости α , пересекая одну фигуру пересекает также и другую, причём образованные при этом сечения данных фигур имеют равные площади, то данные фигуры имеют один и тот же объём.

Вообще говоря, эту аксиому можно доказать, опираясь на другие аксиомы геометрии, но это доказательство не может быть проведено в рамках нашего курса геометрии.

Бонаventura Кавальери родился в Милане в конце XVI века (по некоторым данным, в 1598 г.) в одной из знатнейших семей*. Кавальери получил прекрасное гуманитарное образование: он был основательно знаком с лучшими произведениями греческой и латинской прозы и поэзии, знал столько латинских стихов наизусть, что всегда пересыпал ими свою речь, и писал на безукоризненной классической латыни.

Ещё в молодости Кавальери увлекался точными науками и читал античных классиков математики. В Пизе он сблизился с известным тогда математиком монахом-бенидиктинцем Кастелли, который, убедившись в его исключительных математических дарованиях, дал ему совет посвятить себя изучению геометрии. В чрезвычайно короткое время Кавальери изучил Архимеда, Паппа, Аполлония и других античных авторов. Кастелли познакомил Кавальери с величайшей знаменитостью того времени – Галилеем, который пришёл в такое же восхищение от Кавальери, как и Кастелли, и некоторое время руководил его занятиями.

Среди самых известных трудов Кавальери может быть названа «Геометрия неделимых», вышедшая первым изданием в 1635 г., а вторым (без существенных изменений) в 1653 г., после смерти Кавальери.

Для иллюстрации применения метода Кавальери на практике приведём очень известную задачу о чаше и конусе.

Эта задача имеет большую историю, она широко использовалась для иллюстрации метода Кавальери.

1. На рис. 6.5 изображена полуокружность AGB , вписанная в прямоугольник $ABFD$ (дано).

2. Представим, что эта фигура вращается вокруг оси CG . В результате такого вращения и получится «чаша», о которой говорится в данной задаче (рис. 6.6a). На рис. 6.6б изображено сечение этой чаши.

3. Соединим точки C и D , C и F (построение) (рис. 6.7a).

4. Будем вращать всю полученную конструкцию вокруг оси CG . При вращении треугольника CDF вокруг оси CG получится конус (рис. 6.7б).

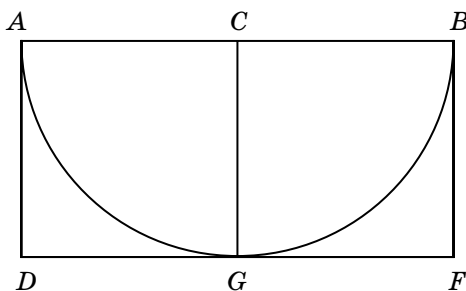


Рис. 6.5

* Краткая историческая информация взята из статьи С.Лурье «Математический эпос Кавальери», Квант, 1994 г., №2.

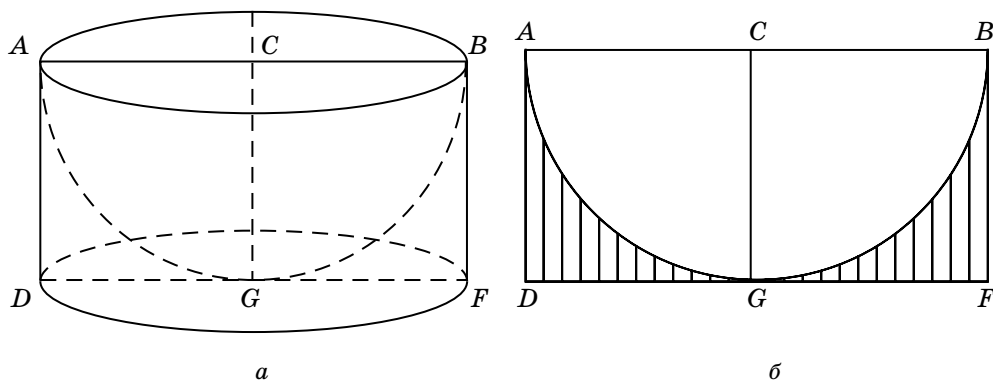


Рис. 6.6

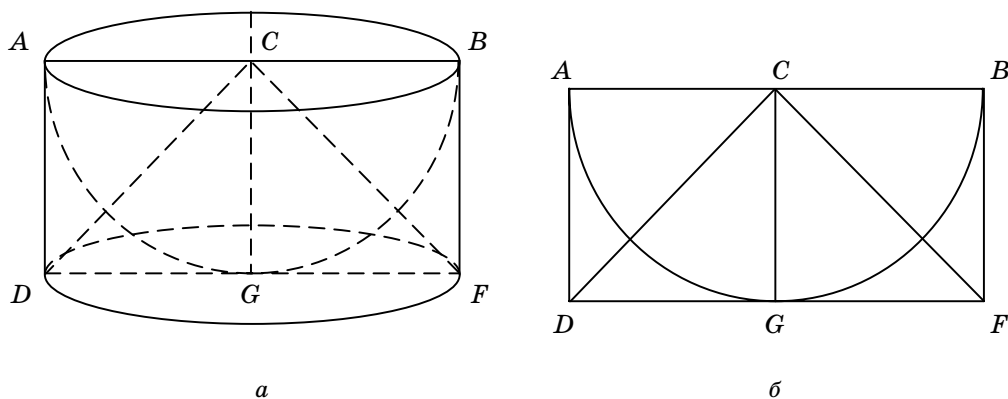


Рис. 6.7

5. В сечении все вместе это будет выглядеть, как на рис.6.8а.

Для чего нам понадобился конус? И вообще, как формулируется задача о чаше? Древние хотели найти объём чаши. Наши построения помогают сравнить объём чаши с объёмом полученного конуса.

6. Нужно установить, что объёмы чаши и нашего конуса равны (требуется доказать в задаче о чаше).

Как это установить? Поможет метод Кавальери. Нам нужно рассмотреть плоскость, пересекающую чашу и конус параллельно основанию чаши.

7. Плоскость сечения может получиться при вращении произвольной прямой MN , проведенной параллельно AB , относительно оси CG (рис. 6.9).

Что же получится в сечении нашей конструкции после проведения секущей плоскости? Равенство площадей каких фигур нам нужно доказать, чтобы применить метод Кавальери?

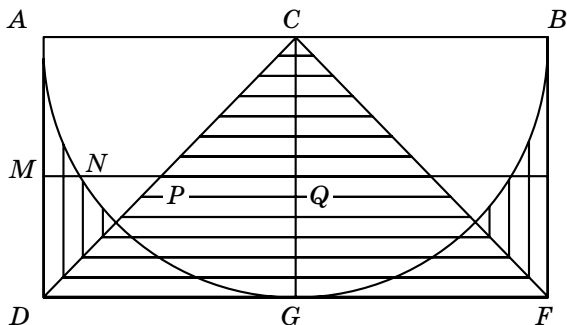


Рис. 6.8

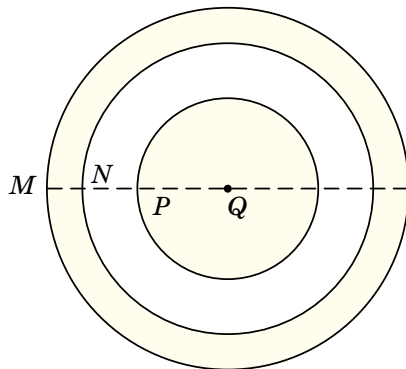


Рис. 6.9

8. В сечении нашей фигуры плоскостью получится несколько кругов, изображённых на рис. 6.9.

9. Нам нужно доказать, что площади заштрихованных на рис. 6.9 фигур равны (требуется доказать).

10. Для доказательства п.9 нам нужно соединить точки N и C (рис. 6.10).

11. В треугольнике CNQ сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы; следовательно, и сумма площадей кругов, построенных на катетах, равна площади круга, построенного на гипотенузе: $CN^2 = CQ^2 + NQ^2$, значит, $\pi CN^2 = \pi CQ^2 + \pi NQ^2$ (1, 10, теорема Пифагора, формула площади круга).

12. $CN = CA$ (радиусы одной и той же окружности, 1).

13. $CQ = PQ$ (1, 10, свойство квадрата).

Замечание. $ADCG$ – квадрат, и п. 13 нужно отдельно доказать.

14. $S_{\text{круга}(Q,MQ)} = S_{\text{круга}(Q,NQ)} + S_{\text{круга}(Q,PQ)}$ (5, 12, 13).

15. Вычитая из обеих частей равенства п. 14 площадь круга, построенного на катете NQ , получаем, что площадь кольцевого сечения конструкции равна площади соответствующего кругового сечения конуса (14).

16. Мы убедились, что площадь всякого горизонтального сечения чаши (площадь кольца) равна площади соответствующего сечения конуса (площадь круга) (8, 9).

17. По принципу Кавальери, п. 16 означает, что чаша равнолика конусу: $V_{\text{чаши}} = V_{\text{конуса}}$. ■

Этот вывод даёт нам возможность, зная формулу для объёма цилиндра и конуса, найти формулу для объёма шара (к этому вопросу мы ещё вернёмся позднее).

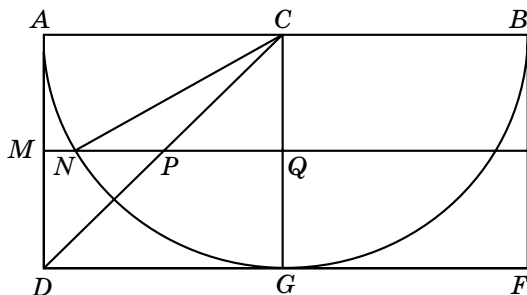


Рис. 6.10



ОБЪЁМ ПРИЗМЫ

В параграфе 6.1 мы говорили об объёмах куба и прямоугольного параллелепипеда. Теперь мы хотим научиться находить объём произвольной призмы.

Как указывалось в предыдущем разделе, для вычисления объёмов мы будем использовать принцип Кавальери, а для его применения нужно рассмотреть понятие поперечного сечения призмы и уметь находить площади этих сечений.

Дадим определение поперечного сечения призмы.

Определение 46. Поперечным сечением призмы называется пересечение призмы с плоскостью, параллельной плоскости её основания.

На рис. 6.11 мы имеем поперечное сечение четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью α . В сечении мы получим четырёхугольник $A_2 B_2 C_2 D_2$.

Докажем теорему о свойствах поперечных сечений для случая треугольной призмы.

Теорема 34. Все поперечные сечения треугольной призмы равны основанию.

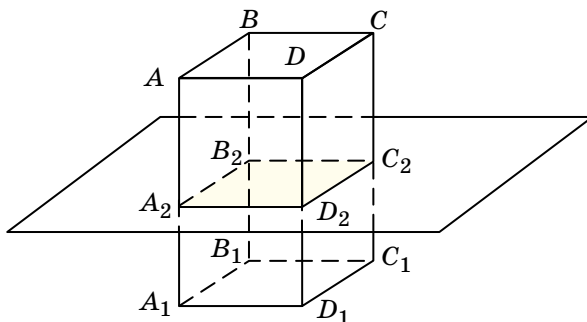


Рис. 6.11

Доказательство

1. Треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$,
её основаниями являются два равных
треугольника ABC и $A_1B_1C_1$.

2. Плоскость α_2 , параллельная плоскостям α и α_1 ,
является поперечным сечением призмы.

3. $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (требуется доказать).

(дано) (рис. 6.12)

Сначала докажем, что $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta ABC$, сравним стороны этих треугольников.

4. $AC \parallel A_2C_2$ (2, теорема о параллельности линий пересечения параллельных плоскостей плоскостью – из учебника геометрии для 10 класса).

5. $AA_1 \parallel CC_1$ (1).

6. Четырёхугольник AA_2C_2C – параллелограмм (2, 4, 5, признак параллелограмма).

7. $AC = A_2C_2$ (6).

8. Аналогично, можно доказать, что $AB = A_2B_2$ и $BC = B_2C_2$ (докажите самостоятельно).

9. $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta ABC$ (7, 8, признак равенства треугольников).

10. Аналогично можно доказать, что $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$ (проведите доказательство самостоятельно).

11 (3). $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (9, 10). ■

Мы не будем доказывать эту теорему для других видов призм (не треугольных), т.к. все случаи могут сводиться к рассмотрению треугольных призм.

Рассмотрите этот вопрос самостоятельно.

Докажем теорему о свойстве площадей поперечных сечений призмы.

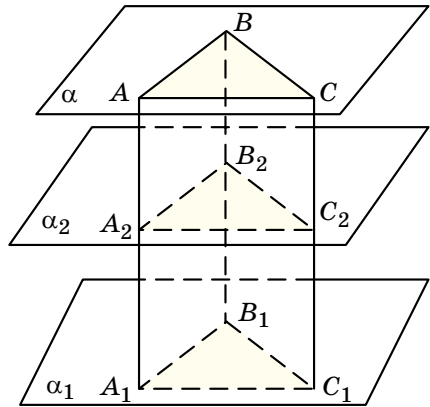


Рис. 6.12

Теорема 35. Все поперечные сечения призмы имеют одну и ту же площадь.

Изучая свойства площадей мы формулировали такое её свойство: если фигуры равны, то и площади таких фигур равны.

Используя это свойство, легко доказать нашу теорему.

Теперь мы готовы к применению принципа Кавальери к нахождению объёма призмы.

Теорема 36. Объём призмы равен произведению площади её основания на высоту.

Доказательство

1. Произвольная призма.
 2. h – высота данной призмы, а S – площадь основания.
 3. Найти объём данной призмы (вывести формулу).
- } (дано)
} (рис. 6.13)

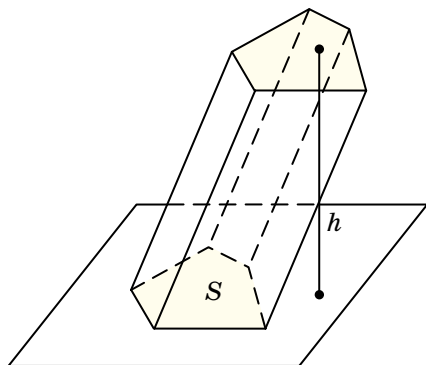


Рис. 6.13

Мы будем использовать при доказательстве принцип Кавальери, а значит для данной призмы следует подобрать соответствующий прямоугольный параллелепипед, т.к. его объём мы находить умеем.

4. Построим прямоугольный параллелепипед с той же высотой h и той же площадью основания S , основание которого лежит в той же плоскости, что и основание данной призмы (построение) (рис. 6.14).

5. Все поперечные сечения обеих призм имеют одну и ту же площадь S (1, 4, Т.35).

6. На основании принципа Кавальери обе призмы имеют один и тот же объём (4, 5, принцип Кавальери).

7 (3). Прямоугольный параллелепипед имеет объём Sh , а значит, данная призма имеет такой же объём. ■

Итак,

$$V_{\text{пр.}} = S \cdot h,$$

где S – площадь основания призмы, а h – высота призмы.

Доказанная теорема может быть использована при ответе на следующий вопрос.

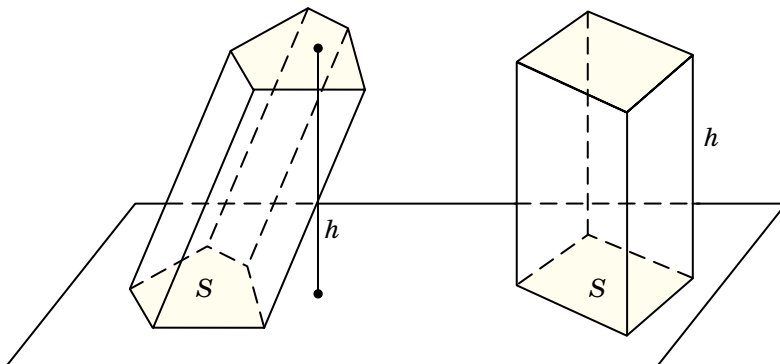


Рис. 6.14



Посмотрите на рис. 6.15. Что можно сказать об объёмах изображённых на рисунках призм? Обоснуйте свой вывод.

Рассмотрим решение задачи на вычисление объёма призмы.

ЗАДАЧА

Найдите объём четырёхугольной прямой призмы, высота которой равна h , а диагонали наклонены к плоскости основания под углами α и β , а острый угол между диагоналями основания равен γ ?

Решение

1. Четырёхугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с высотой h .
2. Диагонали наклонены к плоскости основания под углами α и β .
3. Острый угол между диагоналями основания равен γ .
4. Найти объём призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

Так как высота призмы дана, решение сводится к отысканию площади её основания $ABCD$, которое является выпуклым четырёхугольником.

Следует также разобраться с данными пункта п.2.

5. $C_1 C$ и $D_1 D$ перпендикулярны плоскости основания (1, определение прямой призмы).

6. $\angle C_1 A C = \alpha$, $\angle D_1 B D = \beta$ (1, 2, 5, определение угла между прямой и плоскостью) (рис. 6.16).

7. Из треугольников ACC_1 и BDD_1 находим диагонали основания: $d_1 = AC = h \cdot \operatorname{ctg} \alpha$, $d_2 = BD = h \cdot \operatorname{ctg} \beta$.

8. Площадь выпуклого четырёхугольника выражается через его диагонали d_1 , d_2 и угол между ними γ по формуле

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \gamma \text{ (требуется доказать).}$$

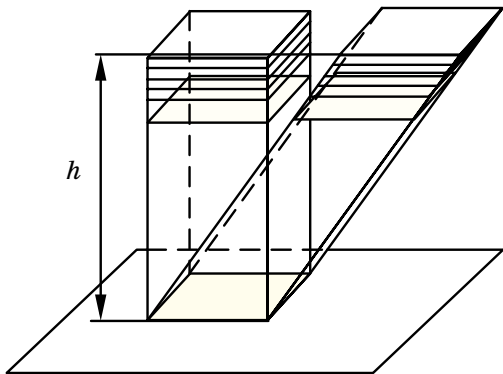


Рис. 6.15

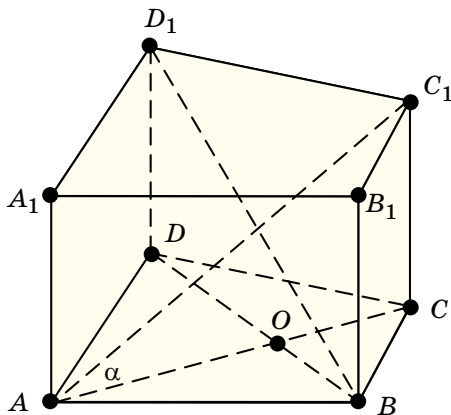


Рис. 6.16

9. Площадь четырёхугольника $ABCD$, диагонали которого AC и BD пересекаются в точке O , можно записать как сумму площадей треугольников:

$$S_{ABCD} = (S_{AOB} + S_{BOC}) + (S_{COD} + S_{DOA}) \text{ (рис. 6.17) (1, свойства площади).}$$

10. $S_{AOB} + S_{BOC} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \gamma + \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin (\pi - \gamma) = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot \sin \gamma (OA + OC) = \frac{1}{2} AC \cdot OB \cdot \sin \gamma$ (через γ обозначен угол AOB ; тогда $\angle BOC = \pi - \gamma$, а $\sin (\pi - \gamma) = \sin \gamma$).

Аналогично $S_{COD} + S_{DOA} = \frac{1}{2} AC \cdot OD \cdot \sin \gamma$ (1, 3, 9, свойства площади, формула площади треугольника).

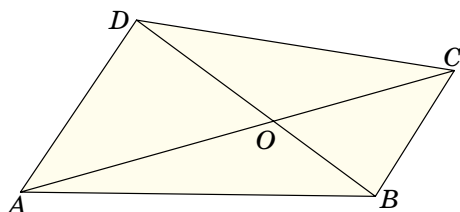


Рис. 6.17

$$\begin{aligned} 11. S_{ABCD} &= \frac{1}{2} AC \cdot OB \cdot \sin \gamma + \frac{1}{2} AC \cdot OD \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} AC \cdot \sin \gamma (OB + OD) = \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \gamma \text{ (9, 10).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12. V &= Sh = \frac{1}{2} (h \cdot \operatorname{ctg} \alpha) \cdot (h \cdot \operatorname{ctg} \beta) \\ \sin \gamma \cdot h &= \frac{1}{2} h^3 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \cdot \sin \gamma \text{ (7, 8,} \\ &\text{формула объёма призмы).} \blacksquare \end{aligned}$$

§ 6.4



ОБЪЁМ ПИРАМИДЫ

Как и в случае призмы, мы начнём с рассмотрения поперечного сечения пирамиды. Горизонтальные поперечные сечения определяются для пирамиды так же, как и для призмы.

Определение 47. Поперечным сечением пирамиды называется её сечение плоскостью, параллельной основанию.

На рис. 6.18 $\Delta A_1B_1C_1$, является поперечным сечением пирамиды $SABC$, т.к. плоскость α , которой принадлежит $\Delta A_1B_1C_1$, параллельна плоскости основания пирамиды.

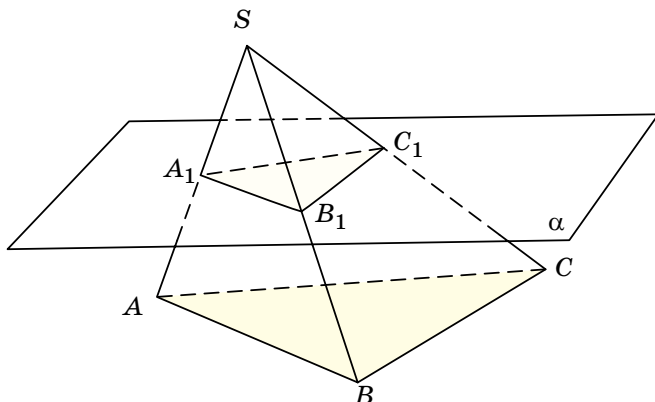


Рис. 6.18

Очевидно, что по мере того, как горизонтальная плоскость движется от основания пирамиды к её вершине, площадь поперечного сечения всё время убывает, до тех пор, пока она не станет равной нулю (это произойдёт, когда плоскость сечения пройдет через вершину пирамиды).

В следующей теореме мы выведем формулу, показывающую, как изменяется площадь поперечного сечения для треугольной пирамиды:

Теорема 37. Каждое поперечное сечение треугольной пирамиды, заключённое между основанием и вершиной, является треугольником, подобным основанию. Если h – высота пирамиды и k – расстояние от вершины до плоскости поперечного сечения, то площадь поперечного сечения равна площади основания, умноженной на число $\frac{k^2}{h^2}$.

Доказательство

- | | | |
|--|---|--------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Дана треугольная пирамида $SABC$. Основанием пирамиды служит ΔABC. 2. $\Delta A_1B_1C_1$ – поперечное сечение данной пирамиды. 3. Отрезок SP есть перпендикуляр, опущенный из вершины S на плоскость основания, причем $SP = h$, а отрезок SP_1 – перпендикуляр, опущенный из S на плоскость поперечного сечения, причем $SP_1 = k$. | } | <p>(дано)
(рис. 6.19а)</p> |
|--|---|--------------------------------|

4. $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ и $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{k^2}{h^2} S_{\Delta ABC}$ (требуется доказать).

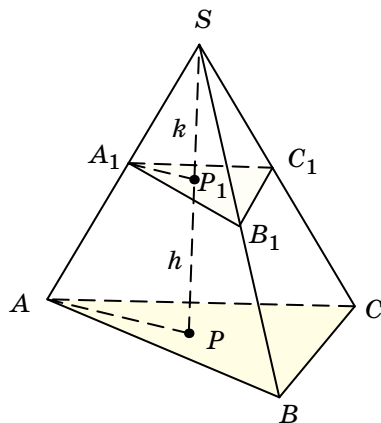
5. Соединим точки A и P , A_1 и P_1 отрезками (построение) (рис. 6.19б).

Для удобства дальнейшего решения рассмотрим фрагмент конструкции в виде плоского чертежа (рис. 6.19 б).

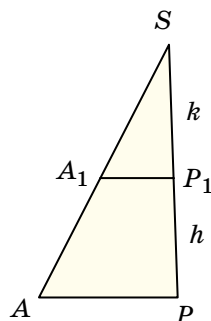
6. $SP_1 \perp A_1P_1$, $SP \perp AP$ (3)

7. $A_1P_1 \parallel AP$ (1, 2)

8. $\Delta SA_1P_1 \sim \Delta SAP$ (7)



а



б

Рис. 6.19

9. $\frac{SA_1}{SA} = \frac{k}{h}$ (3, 8, определение подобных треугольников).

10. Точно так же, рассматривая $\Delta SB_1P_1 \sim \Delta SBP$, мы можем доказать, что

$$\frac{SB_1}{SB} = \frac{k}{h}.$$

11. На основании признака подобия треугольников получаем, что $\Delta SAP \sim \Delta SA_1P_1$ (9, 10).

$$12. \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{SA_1}{SA} = \frac{k}{h} \quad (11).$$

13. Отрезки AB и A_1B_1 ничем не отличаются от отрезков BC и B_1C_1 .

Поэтому $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{k}{h}$ и $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{k}{h}$.

14. Таким образом, $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

Итак мы доказали первую часть нашей теоремы.

Вторая часть доказательства следует из того, что отношение каждой пары соответствующих сторон треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC равно $\frac{k}{h}$. ■

Площади поперечных сечений ведут себя так независимо от того, какую форму имеет основание пирамиды: отношение площадей всегда равно $\frac{k^2}{h^2}$.

Теорема 38. Отношение площади поперечного сечения к площади основания пирамиды равно $\frac{k^2}{h^2}$, где h – высота пирамиды, а k – расстояние от вершины пирамиды до плоскости поперечного сечения.

Проведите доказательство этой теоремы самостоятельно.

Доказанные теоремы позволяют нам доказать еще одну нужную в дальнейшем теорему.

Теорема 39. Если две пирамиды имеют одну и ту же площадь основания и одну и ту же высоту, то их поперечные сечения, равноудалённые от вершин, имеют одну и ту же площадь.

Доказательство

Мы докажем эту теорему для случая двух треугольных пирамид (рис. 6.20). Однако сама теорема и способ её доказательства верны для любых пирамид.

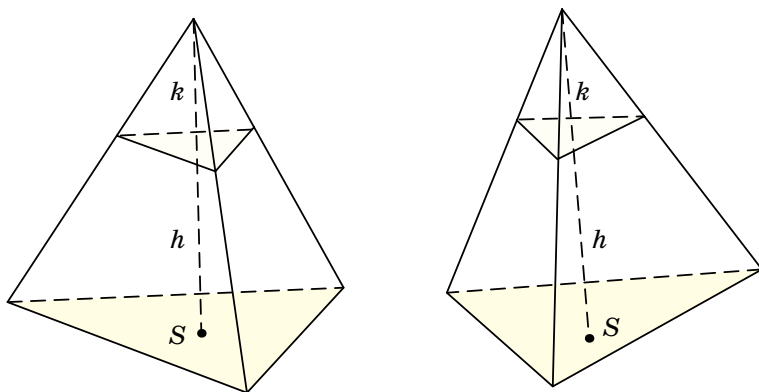


Рис. 6.20

Пусть, как указано на рисунке 6.20, S – площадь основания каждой из наших пирамид, h – высота и k – расстояние от плоскости каждого из поперечных сечений до соответствующей вершины. Тогда по Т.37 площадь каждого из поперечных сечений равна $\frac{k^2}{h^2} S$, и поэтому площади одинаковы.

Перейдём к нахождению объёмов пирамид.

Докажем сначала одно важное свойство объёмов пирамид.

Теорема 40. Если две пирамиды имеют одну и ту же площадь основания и одну и ту же высоту, то они имеют один и тот же объём.

Доказательство

1. Две пирамиды с равными площадями оснований и равными высотами h (дано).

2. Объёмы этих пирамид равны (требуется доказать).

Мы хотим воспользоваться для доказательства п.2 принципом Кавальери, поэтому мы должны проверить выполнение условий этого принципа.

3. Расположим наши пирамиды так, чтобы их основания лежали в одной и той же плоскости, а сами пирамиды располагались по одну сторону от этой плоскости (построение) (рис. 6.21).

4. Соответствующие поперечные сечения наших двух пирамид имеют одну и ту же площадь (3, Т.38).

5. Объёмы пирамид одинаковы (1,3,4, принцип Кавальери). ■

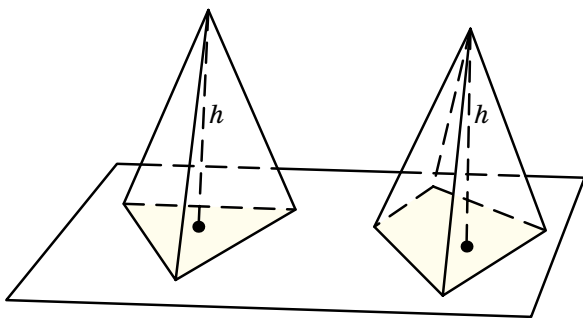


Рис. 6.21

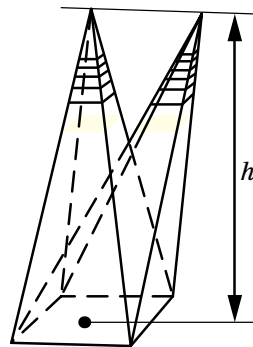


Рис. 6.22



Посмотрите на рис. 6.22 и подумайте, что можно сказать об объёмах изображённых на этом рисунке пирамид? Обоснуйте свой вывод.

Докажем теперь теорему о нахождении объёма треугольной пирамиды.

Теорема 41. Объём треугольной пирамиды равен одной трети произведения площади её основания на высоту.

Доказательство

1. Треугольная пирамида $PABC$ с площадью основания S и высотой h (дано) (рис. 6.23).

2. $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$ (требуется вывести).

Сведём процесс нахождения объёма пирамиды к известному нам вычислению объёма призмы.

3. Построим призму $DEFABC$ с площадью основания, равной площади основания данной пирамиды, и с такой же высотой (построение) (рис. 6.24).

Замечание. Мы можем взять прямую треугольную призму, как на рис. 6.20. Выбор призмы не имеет значения; важно чтобы точки P и E находились на одинаковом расстоянии от плоскости ABC .

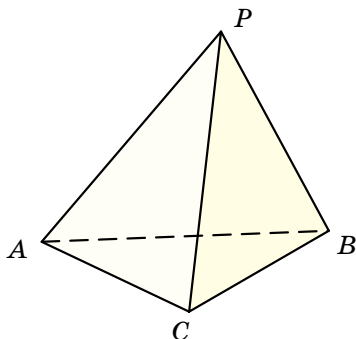


Рис. 6.23

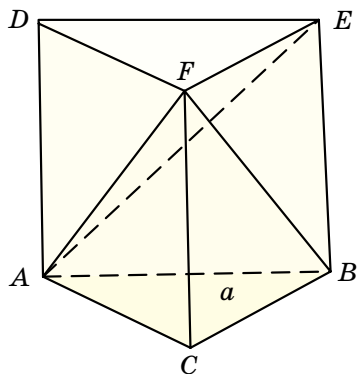


Рис. 6.24

4. Разобьём призму $DEFABC$ на три пирамиды, как показано на рисунке 6.24. Обозначим эти пирамиды, перечислив их вершины в каком угодно порядке. Таким образом, мы имеем три новые пирамиды $ADEF$, $ABEF$ и $AFBC$. Если их изобразить отдельно, то они будут выглядеть как на рис. 6.25 а, б, в (построение).

Докажем равенство объёмов этих пирамид.

5. Пирамиды $ADEF$ и $ABEF$ имеют один и тот же объём (рис. 6.25 а,б) (требуется доказать).

6. Будем рассматривать точку F как вершину каждой из наших пирамид (4, 5).

7. Основаниями пирамид $ADEF$ и $ABEF$ служат треугольники ADE и ABE (6).

8. Так как треугольники ADE и ABE равны, то пирамиды $ADEF$ и $ABEF$ имеют одну и ту же площадь основания (4, 6, 7).

9. Рассматриваемые пирамиды имеют одну и ту же высоту, так как высота каждой из них равна расстоянию от точки F до плоскости, содержащей их основания (4, 6, 7).

10. Пирамиды $ADEF$ и $ABEF$ имеют один и тот же объём (8, 9, Т.40)

11. Пирамиды $ADEF$ и $ABFC$ имеют один и тот же объём (требуется доказать) (рис. 6.25б,в).

12. Мы можем рассматривать A как вершину каждой из наших пирамид. Тогда их основаниями служат треугольники BEF и FBC (4).

13. Эти треугольники равны, а значит пирамиды $ADEF$ и $ABFC$ имеют одну и ту же площадь основания. Кроме этого они имеют одну и ту же высоту, так как высота каждой из них равна расстоянию от A до плоскости, содержащей их основания (4, 11).

14. Пирамиды $ADEF$ и $ABFC$ имеют один и тот же объём (4, 11, 12, Т.40)

15. Пирамида $AFBC$ и первоначальная пирамида $PABC$ имеют один и тот же объём (требуется доказать).

Доказательство этого пункта проведите самостоятельно.

16. Объём призмы равен Sh (1, 2, формула объёма призмы).

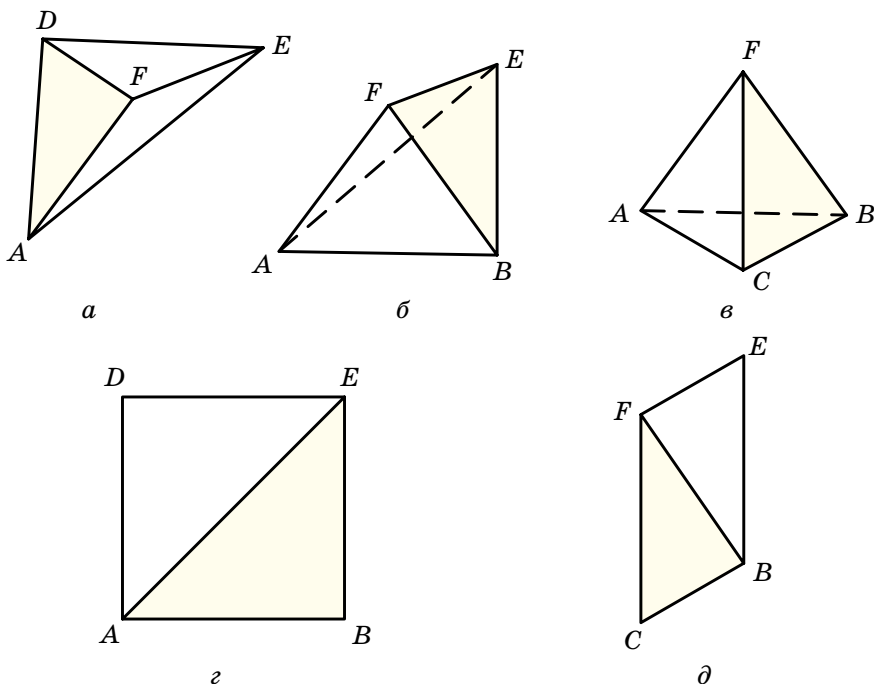


Рис. 6.25

17. Если V – объём каждой из рассматриваемых пирамид, то $3V = Sh$ (5, 10, 13, 14, свойства объёма).

$$2. V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h. \blacksquare$$

Тот же результат сохраняется и для любых пирамид.

Теорема 42. Объём пирамиды равен одной трети произведения площади её основания на высоту.

Доказательство

1. Дана пирамида (на рис. 6.26 четырёхугольная, но может быть и с любым другим основанием) с площадью основания S и высотой h (дано) (рис. 6.26а).

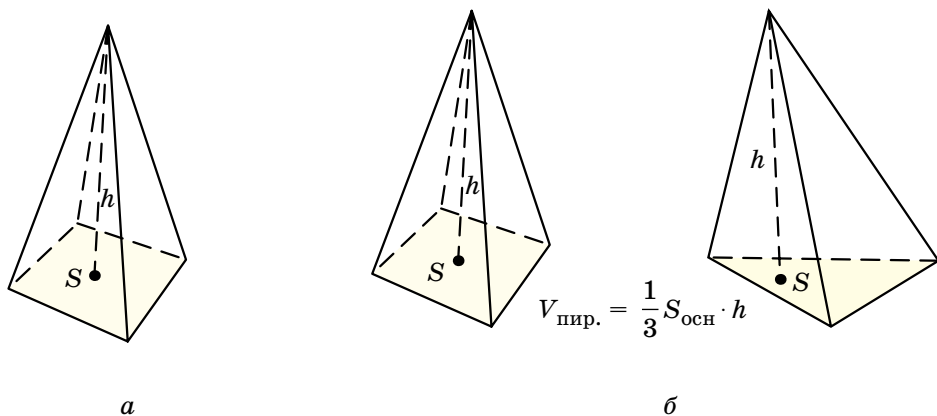


Рис. 6.26

$$2. V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h \text{ (требуется вывести).}$$

Сведём рассмотрение этой пирамиды к соответствующей треугольной пирамиде, т.е. применим принцип Кавальери.

3. Возьмём треугольную пирамиду с той же площадью основания и с той же высотой, как у данной пирамиды так, чтобы основание её лежало в той же плоскости, в которой лежит основание данной пирамиды (построение) (рис. 6.26б).

4. Поперечные сечения этих двух пирамид, лежащие на одинаковом уровне, имеют одинаковую площадь (3, Т.39).

5. На основании принципа Кавальери эти две пирамиды имеют один и тот же объём (4, принцип Кавальери).

6. Объём треугольной пирамиды равен $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$ (5, 6). ■

Итак, $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$,

где S – площадь основания пирамиды, а h – высота пирамиды.

ЗАДАЧА

Основание пирамиды – равнобедренный треугольник со сторонами 6 см, 6 см и 8 см. Все боковые рёбра равны 9 см. Найдите объём пирамиды.

Решение

1. $PABC$ – треугольная пирамида.
2. $\triangle ABC$ – равнобедренный, $AB = 6$ см,
 $CB = 6$ см, $BC = 8$ см.
3. $PA = PB = PC = 9$ см.
4. $V_{\text{пир.}} = ?$ (требуется найти).
5. $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$, где H – высота пирамиды (формула объёма пирамиды).

} (дано)
рис.6.27а

Итак, нахождение объёма пирамиды сводится к нахождению площади основания $S_{\triangle ABC}$ и высоты пирамиды H .

6. Проведём высоту пирамиды: $PO = H$ (построение) (рис.6.27б).

7. Так как боковые рёбра пирамиды равны, основание O высота пирамиды PO есть центр описанной около основания окружности (1, 3, свойство вписанной пирамиды).

Нам будет удобно отдельно рассмотреть основание пирамиды, $\triangle ABC$ и выполнить там дополнительные построения, как показано на рис.6.27 в.

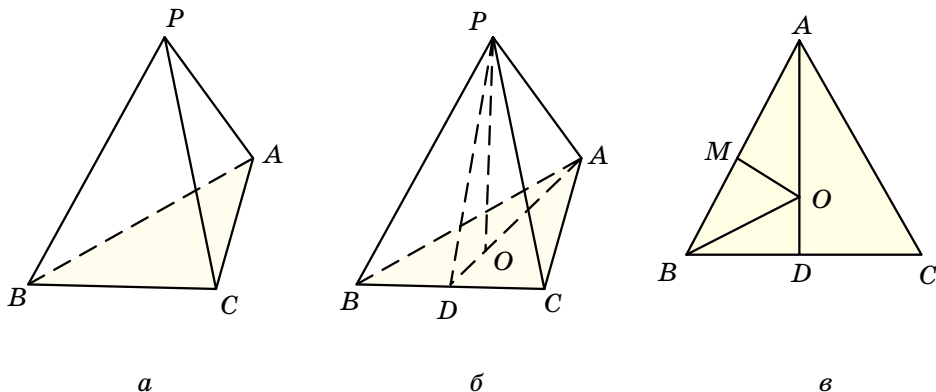


Рис. 6.27

8. Соединим точку O с точкой B и с точкой M – серединой стороны AB (рис. 6.27в) (построение).

9. PO отыскивается по формуле $H = \sqrt{PB^2 - R^2}$ (6, 7, 8, теорема Пифагора).

Радиус R описанной около треугольника ABC окружности можно найти из треугольника AMO , где MO – серединный перпендикуляр к отрезку AB .

10. Если угол MAO равен α , то $\sin \alpha = \frac{BD}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ (8, определения синуса и косинуса).

$$11. R = OA = \frac{AM}{\cos \alpha} = \frac{AB}{2 \cos \alpha} = \frac{6}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{9}{\sqrt{5}} \text{ см (8, 10).}$$

$$12. H = \sqrt{9^2 - \frac{9^2}{5}} = \sqrt{9^2(1 - \frac{1}{5})} = 9 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{18}{\sqrt{5}} \text{ см (9, 11).}$$

13. Если D – середина BC , то AD – высота основания. $BD = CD = \frac{BC}{2} = 4$ см, то $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ см (1, 8, теорема Пифагора).

14. Площадь основания $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$ см² (13, формула площади треугольника).

15 (5). Находим объём пирамиды: $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{5} \cdot \frac{18}{\sqrt{5}} = 8 \cdot 6 = 48$ см³ (12, 14, формула объёма пирамиды). ■



ОБЪЕМЫ ПОДОБНЫХ ФИГУР

Мы уже имеем представление о том, что линии имеют длину, поверхности – площадь, тела – объём.

Каждая из этих величин измеряется в своих единицах, например длина – в сантиметрах, площадь – в квадратных сантиметрах, объём – в кубических сантиметрах.

Можно сформулировать некоторые свойства подобных фигур, называемых свойствами размерности.

У двух подобных фигур с коэффициентом подобия k :

- 1) отношение соответственных длин равно k .
- 2) отношение площадей соответственных площадей равно k^2 .
- 3) отношение соответственных объёмов фигур равно k^3 .

Когда говорят об измерении объёмов фигур, то понимают, что не у каждой фигуры можно найти объём. Так при определении объёма мы рассматривали кублируемые фигуры. Удобно рассматривать простые фигуры, т.е. фигуры, которые можно разбить на конечное число пирамид.

Рассмотрим некоторые свойства объёмов подобных фигур.

1. Пусть T и T' – две простые подобные фигуры (дано).

Это значит, что существует преобразование подобия, при котором фигура T переходит в фигуру T' . Обозначим через k коэффициент подобия.

2. Разобьём фигуру T на треугольные пирамиды $P_1, P_2, \dots, P_n$ (разбиение).

3. Преобразование подобия, которое переводит фигуру T в фигуру T' , переводит пирамиды $P_1, P_2, \dots, P_n$ в пирамиды $P_1', P_2', \dots, P_n'$. Эти пирамиды составляют фигуру T' , и поэтому объём фигуры T' равен сумме объёмов пирамид $P_1', P_2', \dots, P_n'$.

4. Так как пирамиды P_i' и P_i подобны и коэффициент подобия равен k , то отношение их высот равно k , а отношение площадей их оснований равно k^2 (1, 3, свойства подобных фигур).

5. Отношение объёмов пирамид равно k^3 . Так как фигура T составлена из пирамид P_i , а фигура T' составлена из пирамид P_i' , то отношение объёмов фигур T' и T тоже равно k^3 (5, свойство объёмов).

Число k – коэффициент подобия – равно отношению расстояний между любыми двумя соответствующими парами точек при преобразовании подобия. Следовательно, это число равно отношению любых двух соответствующих линейных размеров фигур T' и T . Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема 43. Объёмы двух подобных фигур относятся как кубы их соответствующих линейных размеров.

Решим задачу, в которой рассматривается важный вопрос о нахождении объёма усечённой пирамиды.

ЗАДАЧА

Найдите объём усечённой пирамиды с площадями оснований S_1 и S_2 ($S_1 > S_2$) и высотой h .

Решение

1. Усечённая пирамида $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$.
2. Площади оснований усечённой пирамиды S_1 и S_2 ($S_1 > S_2$)
3. Высота усечённой пирамиды h , $O_1O_2 = h$.
4. Найти объём усечённой пирамиды.

}

(дано)
(рис.6.28а)

5. Так как мы знаем формулу объёма только для полной пирамиды, то дополним данную усечённую пирамиду до полной, пусть $PO = x$ – её высота (построение) (рис. 6.28б).

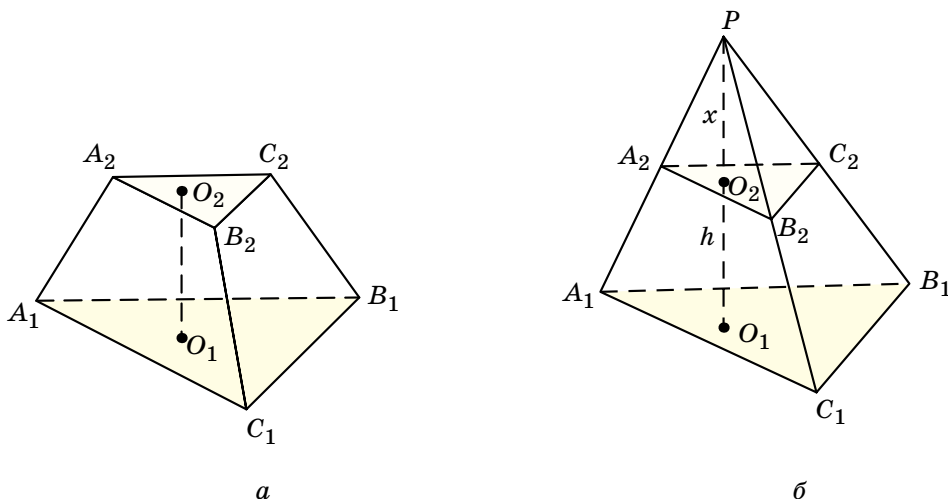


Рис. 6.28

6. Объём усечённой пирамиды равен разности объёмов двух полных пирамид: одной с площадью основания S_1 и высотой x , другой с площадью основания S_2 и высотой $x - h$ (1, 4, свойства объёмов).

7. Пирамиды $PA_2B_2C_2$ и $PA_1B_1C_1$ гомотетичны с центром гомотетии P , а значит они подобны (1, 5, свойства гомотетии).

8. Из подобия этих пирамид находим x : $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{x}{x-h}\right)^2$. Отсюда $x = \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}$ (6, свойства подобных фигур).

9. Объём усечённой пирамиды равен:

$$V = \frac{1}{3} \left[S_1 \frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} - S_2 \left(\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} - h \right) \right] = \frac{1}{3} h \frac{S_1\sqrt{S_1} - S_2\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} = \frac{1}{3} h (S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2) . \blacksquare$$

РАЗВИВАЕМ УМЕНИЯ

ЗАДАЧИ К §§ 6.1 – 6.2



1 Какие единицы объёма вы знаете?



2 Как изменится объём куба, если его ребро: а) увеличить в 2 раза; б) уменьшить в 3 раза; в) уменьшить на 50%?

3 На сколько кубических сантиметров увеличится объём куба, если его ребро, равное 1 м, увеличить на 1 см?

4 На сколько кубических сантиметров уменьшится объём куба, если его ребро, равное 1 м, уменьшить на 1 см?



5 Высота прямоугольного параллелепипеда равна 7, а его основание имеет стороны 4 и 5. Найдите его объём.

- 6** Прямоугольный металлический бак размером $30 \text{ см} \times 30 \text{ см} \times 30 \text{ см}$ наполнен водой. Сколько литров воды он содержит?
- 7** Многогранники Φ_1 и Φ_2 имеют объёмы V_1 и V_2 . В каком случае объём фигуры $\Phi \cup \Phi_2$ равен V_1 ?
- 8** Многогранники Φ_1 и Φ_2 имеют объёмы V_1 и V_2 . Найдите объём фигуры $\Phi \cup \Phi_2$, если объём фигуры $\Phi_1 \cap \Phi_2$ равен $0,5V_2$?
- 9** Объём куба равен 27 см^3 . Чему равно ребро куба?
- 10** Объём прямоугольного параллелепипеда 270 дм^3 . Одно его ребро равно 5 дм , а отношение двух других рёбер равно $2 : 3$. Найдите длину этих рёбер.
- 11** Докажите, что плоскость, проведённая через диагональ куба, делит его на две равновеликие части.
- 12** В прямоугольном параллелепипеде площади трёх граней равны 6 дм^2 , 12 дм^2 , 18 дм^2 . Найдите его объём.
- 13** а) Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и составляет с одной гранью угол 30° , с другой – 45° . Найдите объём параллелепипеда, если диагональ его основания равна d .
 б) Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с основанием угол 60° ; двугранный угол между диагональным сечением и боковой гранью равен 45° . Найдите объём параллелепипеда, если диагональ его оснований равна d .

П

- 14** а) В цилиндр радиусом r вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого составляет с основанием цилиндра угол α , угол между диагоналями основания параллелепипеда 60° . Найдите объём параллелепипеда.
 б) В цилиндр высотой h вписан прямоугольный параллелепипед. Угол между диагоналями одной грани, обращённый к боковому ребру, равен α ; угол между диагоналями параллелепипеда, обращённый к тому же ребру, равен β . Найдите объём параллелепипеда.
- 15** В прямоугольный параллелепипед помещены два шара радиусом r так, что каждый касается другого шара и пяти граней параллелепипеда. Найдите объём параллелепипеда.
- 16** В шар радиусом R вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого составляет с одной гранью угол α , с другой – угол 60° . Найдите объём параллелепипеда.

- 17** Строительный кирпич имеет размеры $25 \text{ см} \times 12 \text{ см} \times 6 \text{ см}$. Найдите объём стены, выложенный из 10000 кирпичей. Учтите, что раствор увеличивает объём на 15%.
- 18** Единичный куб пересечён плоскостью, проходящей через его центр симметрии. Чему равен объём каждой части куба?
- 19** Правильная четырёхугольная пирамида объёма V пересечена плоскостью, проходящей через высоту пирамиды. Найдите объёмы полученных частей пирамиды.
- 20** Найдите объём пирамиды, основание которой – грань куба, имеющего объём V , а вершина – точка пересечения диагоналей этого куба.
- 21** Диагональ куба равна d . Найдите объём куба.
- 22** Площади граней прямоугольного параллелепипеда Q_1, Q_2, Q_3 . Докажите, что его объём равен $\sqrt{Q_1 Q_2 Q_3}$.
- 23** Стороны основания прямоугольного параллелепипеда a и b . Его диагональ составляет с плоскостью основания угол α . Найдите объём параллелепипеда.
- 24** Диагональ основания прямоугольного параллелепипеда равна l , угол между диагоналями основания равен α , диагональ меньшей боковой грани составляет с плоскостью основания угол β . Найдите объём и площадь боковой поверхности.
- 25** Сторона основания прямоугольного параллелепипеда равна a и образует с диагональю основания угол α . Через данную сторону и противоположащую ей сторону другого основания проведено сечение, плоскость которого составляет с плоскостью основания угол φ . Найдите объём параллелепипеда.
- 26** На изготовление закрытого ящика с квадратным основанием расходуются $S \text{ м}^2$ фанеры. Найдите линейные размеры ящика, при которых его объём максимален.
- 27** У квадратного листа жести со стороной a вырезаны по углам квадраты (рис. 6.29) и загнуты края. Найдите длину стороны вырезанного квадрата

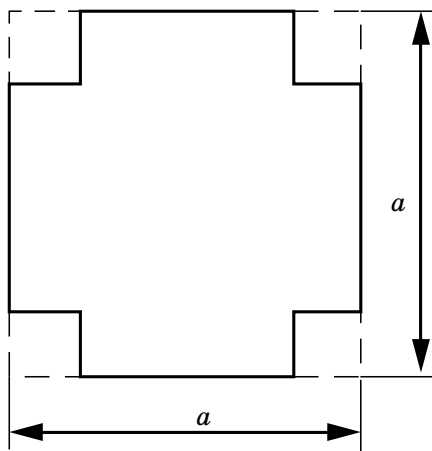


Рис. 6.29

та, если известно, что получилась коробка наибольшей возможной вместимости.

- 28** У двух прямоугольных параллелепипедов равновеликие основания и диагональные сечения. Равны ли объёмы этих параллелепипедов?
- 29** Сколько существует прямоугольных параллелепипедов заданного объёма, если дано только одно измерение параллелепипеда?
- 30** Найдите объём куба, если его полная поверхность равна 600 см^2 .
- 31** Измерения прямоугольного параллелепипеда – 60 см , 1 м и 36 см . Найдите ребро равновеликого ему куба.
- 32** Прямоугольный параллелепипед имеет размеры $64 \text{ см} \times 27 \text{ см} \times 8 \text{ см}$. На сколько квадратных сантиметров его полная поверхность больше полной поверхности равновеликого ему куба?
- 33** Найдите массу стальной двутавровой балки длиной 4 м . Сечение балки показано на рис. 6.30 а, размеры даны в миллиметрах. (Плотность стали $\approx 7,8 \text{ г/см}^3$.)

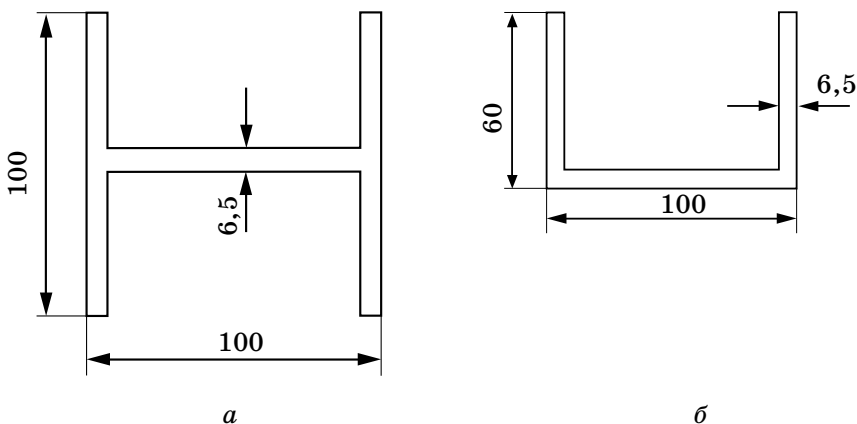


Рис. 6.30

- 34** Вычислите массу полосы профильного железа длиной $25,75 \text{ м}$. Сечение полосы показано на рис. 6.30 б, размеры даны в миллиметрах. Плотность материала $7,8 \text{ г/см}^3$.
- 35** Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны $a\sqrt{5}$, $a\sqrt{5}$ и $a\sqrt{13}$. Найдите его объём.

ЗАДАЧИ К § 6.3

Н

- 36** Что можно сказать об объёмах двух правильных четырёхугольных призм, если их диагональные сечения имеют равные площади?
- 37** Площади боковых поверхностей двух прямых параллелепипедов равны. Равны ли объёмы этих параллелепипедов, если их основания: а) равны; б) имеют равные площади?

Н

- 38** Найдите объём правильной треугольной призмы, если сторона её основания равна 6 дм, а боковое ребро 7 дм.
- 39** Основание прямой призмы – треугольник, у которого стороны длиной 5 и 6 см образуют угол 30° . Боковое ребро призмы равно 4 см. Найдите объём призмы.
- 40** Диагональ грани правильной треугольной призмы равна d и наклонена к стороне основания под углом α . Найдите объём призмы.
- 41** Нужно вырыть прямую канаву длиной 200 м и глубиной 1,5 м, ширина канавы сверху 3 м, у дна – 2 м. Сколько кубометров грунта придётся вынуть?
- 42** Сечение железнодорожной насыпи имеет вид трапеции с нижним основанием 18 м, верхним – 8 м и высотой 3 м. Найдите объём 1 км насыпи.
- 43** В правильной шестиугольной призме площадь большего диагонального сечения 4 см^2 , а расстояние между двумя противоположными боковыми гранями 4 см. Найдите объём призмы.
- 44** Площадь полной поверхности правильной треугольной призмы равна 20 см^2 , а площадь боковой поверхности 12 см^2 . Найдите объём призмы.
- 45** Основание прямой призмы – треугольник с боковыми сторонами 5 см и основанием 6 см. Диагональ большей боковой грани наклонена к плоскости основания под углом 45° . Найдите объём призмы.
- 46** Площадь основания прямой треугольной призмы равна 24 см^2 , а площади боковых граней – 3 см^2 , 4 см^2 и 5 см^2 . Найдите объём призмы.

- 47** Основание призмы – треугольник, у которого одна сторона равна 2 дм, а две другие – по 3 дм. Боковое ребро равно 6 дм и наклонено к плоскости основания под углом α . Найдите объём призмы.
- 48** Основание наклонной призмы – равносторонний треугольник со стороной a . Одна из боковых граней – квадрат, плоскость которого наклонена к плоскости основания под углом 60° . Найдите объём призмы.
- 49** Докажите, что из всех призм, имеющих одно и то же основание и боковое ребро данной длины, наибольший объём имеет прямая призма.
- 50** Высота прямого параллелепипеда H , стороны основания a и b . Каким должен быть двугранный угол φ при боковом ребре, чтобы объём параллелепипеда был наибольшим?
- 51** На двух скрещивающихся рёбрах параллелепипеда даны точки P и Q . Разделите параллелепипед на две части с равными объёмами плоскостью, проходящей через точки P и Q .
- 52** Прямоугольная площадка длиной 80 м и шириной 25 м наклонена так, что одна из меньших сторон находится выше противоположной стороны на 1,2 м. Сколько кубических метров грунта нужно насыпать, чтобы сделать площадку горизонтальной? Сколько кубических метров грунта нужно срезать на площадке, чтобы, пересыпав этот грунт, выровнять площадку (рис. 6.31)?
- 53** Железнодорожная насыпь имеет ширину в верхней части 10 м, а в нижней – 18,5 м, углы откоса 35° . Найдите объём насыпи на прямолинейном участке длиной 1 км.
- 54** Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с гипотенузой c и с большим острым углом α . Диагонали двух больших боковых граней, проведённые из одной вершины нижнего основания, образуют угол β . Найдите объём призмы.
- 55** Двугранный угол при боковом ребре наклонного параллелепипеда равен α , расстояния от этого ребра до двух соседних рёбер равны a и b , боковое ребро – c . Найдите объём.

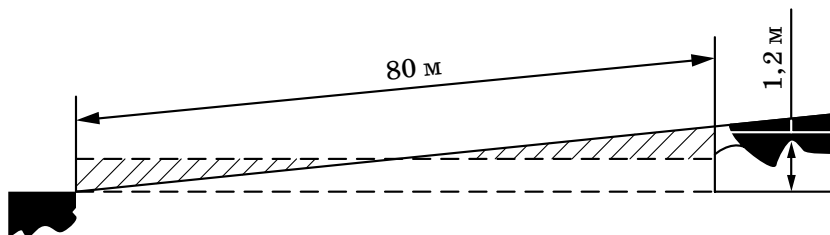


Рис. 6.31

- 56** Основание призмы – равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a ; боковое ребро, противолежащее гипотенузе, образует с катетами углы α и β . Найдите объём призмы, если длина бокового ребра b .
- 57** Основание прямой призмы – равнобедренная трапеция, боковые стороны и меньшее основание которой равны a , острый угол трапеции равен α . Сечение, проходящее через боковую сторону нижнего основания и середину меньших из параллельных сторон нижнего основания, является ромбом. Найдите объём призмы при $a = 6,4$ см, $\alpha = 54^\circ$.
- 58** Найдите объём правильной пятиугольной примы, каждое ребро которой равно a .
- 59** Как относятся объёмы двух призм, полученных при пересечении треугольной призмы плоскостью, проходящей через средние линии её оснований?

П

- 60** Постройте сечение треугольной призмы плоскостью, проходящей через боковое ребро и рассекающей её на две части, объёмы которых относятся как $1 : 2$.
- 61** В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым рёбрам и пересекающее все боковые рёбра. Найдите объём призмы, если площадь сечения Q , а длина бокового ребра l .
- 62** Все девять рёбер треугольной призмы имеют длину a , объём призмы равен V . Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.
- 63** Основание призмы – равнобедренный прямоугольный треугольник. Боковая грань, проходящая через один из катетов этого треугольника, является квадратом со стороной a и образует с плоскостью основания угол α . Найдите объём призмы.
- 64** Постройте сечение треугольной призмы плоскостью, проходящей через точку пересечения медиан основания и параллельной одной из боковых граней. Найдите отношение объёмов многогранников, полученных при пересечении призмы этой плоскостью.
- 65** Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1D_1$ служит треугольник со сторонами $AB = BC = a$ и $\angle BAC = \alpha$. Через прямую AC и точку B_1 проведена плоскость, угол между этой плоскостью и плоскостью основания равен β . Найдите объём отсечённой четырёхугольной пирамиды.

- 66** Основанием призмы служит равнобедренный треугольник ABC , у которого $AB = AC = b$, $\angle A = \alpha$. Известно, что боковая грань призмы является квадратом. Найдите объём призмы.
- 67** Постройте сечение параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, параллельной диагонали AC основания и проходящей через середины рёбер BC и $A_1 B_1$. Найдите отношение объёмов полученных частей параллелепипеда.
- 68** В наклонном параллелепипеде основание и боковая грань – прямоугольники, их площади соответственно равны 20 дм^2 и 24 дм^2 , угол между их плоскостями равен 30° . Третья грань параллелепипеда имеет площадь 15 дм^2 . Найдите объём параллелепипеда.
- 69** Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник площадью S и острым углом α . Площадь большей боковой грани равна Q . Найдите объём призмы.
- 70** Диагональ основания прямого параллелепипеда имеет длину d и составляет со сторонами основания углы α и β . Найдите объём параллелепипеда, если площадь его боковой поверхности равна S .
- 71** а) Постройте сечение треугольной призмы плоскостью, проходящей через боковое ребро и разбивающей её на две части, имеющие равные объёмы.
б) Постройте сечение наклонного параллелепипеда плоскостью, которая проходит через данную точку стороны основания и делит параллелепипед на две призмы равных объёмов.
- 72** Вычислите объём параллелепипеда по длинам трёх его рёбер, имеющих общую вершину, и по углам между ними.
- 73** Диагонали прямого параллелепипеда равны 8 м и 10 м , стороны основания равны 5 м и 3 м . Найдите его объём.
- 74** Основание прямого параллелепипеда – ромб, у которого меньшая диагональ равна d и острый угол равен α . Площадь боковой поверхности равна S . Найдите объём параллелепипеда.
- 75** Боковое ребро прямого параллелепипеда удалено от противоположного диагонального сечения на m , диагональ этого сечения равна l и составляет с плоскостью основания угол α . Найдите объём параллелепипеда, если $m = 4,2 \text{ дм}$, $l = 8 \text{ дм}$, $\alpha = 56^\circ$.
- 76** Найдите двугранные углы при боковых рёбрах прямого параллелепипеда, объём которого равен V , стороны основания — a и b , а площадь боковой поверхности равна сумме площадей оснований.

- 77** В прямом параллелепипеде две диагонали, равные d , образуют угол α . Площадь каждой из боковых граней равна S . Найдите объём параллелепипеда.
- 78** Высота конуса h , осевое сечение – равносторонний треугольник. В него вписан прямоугольный параллелепипед с диагональю d так, что четыре вершины лежат на основании конуса, а четыре на боковой поверхности. При каком условии объём параллелепипеда наибольший?
- 79** Основание призмы – трапеция, параллельные стороны которой 44 см и 28 см, а непараллельные – по 17 см. Одно из диагональных сечений призмы, перпендикулярное основанию, является ромбом с углом 45° . Найдите объём призмы.
- 80** Все грани призмы – ромбы со стороной a и острым углом α . Найдите площадь полной поверхности и объём призмы.
- 81** Диагональ основания правильной четырёхугольной призмы равна d_1 , диагональ призмы равна d_2 . Найдите её объём.
- 82** Докажите, что объём призмы, основанием которой служит трапеция, равен произведению полусуммы площадей параллельных боковых граней на расстояние между их плоскостями.

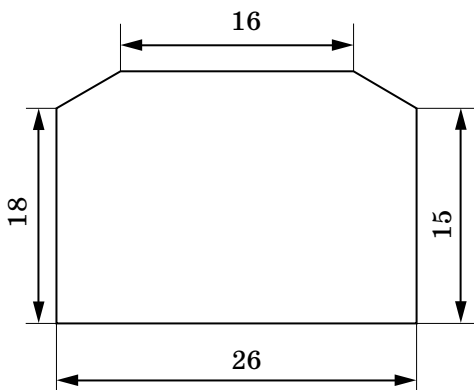


Рис. 6.32

- 83** Длина железнодорожной шпалы равна 2,7 м, её поперечное сечение показано на рисунке 6.32 (размеры в сантиметрах). Сколько шпал можно погрузить на платформу грузоподъёмностью 17 т? (Плотность дерева примите равной $0,8 \text{ г/см}^3$.)
- 84** Из деревянной прямой треугольной призмы с равными рёбрами вырезана прямая четырёхугольная призма наибольшего объёма. Сколько процентов материала ушло в отходы?

- 85** Вращающийся барабан для никелирования мелких деталей имеет форму правильной шестиугольной призмы (рис. 6.33, размеры в сантиметрах). При работе барабан заполняется на $\frac{1}{6}h$. Найдите объём загруженной части барабана.

- 86** Скирда сена имеет форму прямой призмы с пятиугольным основанием, размеры скирды (в метрах) указаны на рис. 6.34. Вычислите массу сена в скирде, приняв массу 1 м^3 сена равной 70 кг.

- 87** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведена плоскость A_1BC . В образовавшуюся над этой плоскостью часть призмы вписан шар радиусом R . Найдите объём призмы.

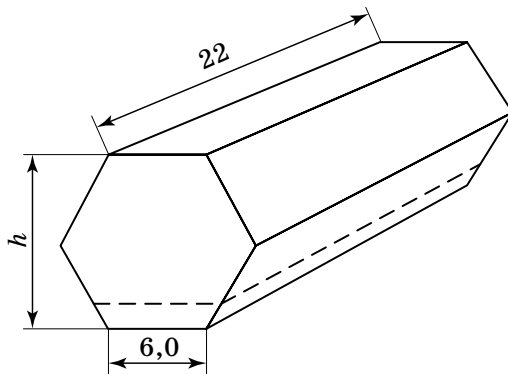


Рис. 6.33

- 88** Призма, основание которой прямоугольный треугольник с острым углом α , описана около шара. Вычислите объём призмы, если перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу в основании призмы, равен h .

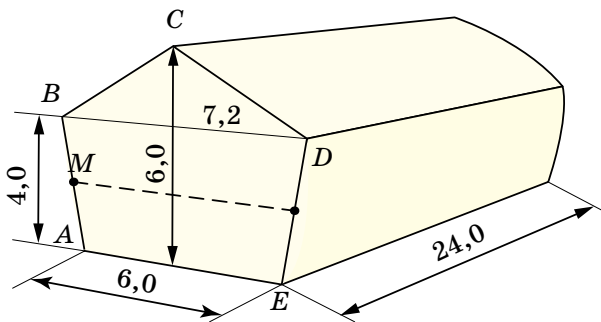


Рис. 6.34

М

- 89** Около шара радиусом r описана правильная n -угольная призма.
1. Найдите объём, площади боковой и полной поверхностей призмы.
 2. Убедитесь, что:
 - а) площадь боковой поверхности в 4 раза больше площади основания;
 - б) площадь полной поверхности в 6 раз больше площади основания;

- в) объём призмы равен произведению площади её полной поверхности на треть радиуса;
 - г) отношение объёмов призмы и шара равно отношению площади полной поверхности призмы к площади полной поверхности шара;
 - д) ни при каком значении n площади боковой и полной поверхностей и объём призмы не могут принимать минимальных значений.
3. Определите, при каком значении n будут наибольшими периметр основания, площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объём призмы.

- 90** В данную сферу впишите n -угольную призму, у которой наибольшие значения имеют: а) площадь боковой поверхности; б) полной поверхности; в) объёма. Вычислите эти экстремальные величины, если радиус сферы равен R .
- 91** В шар радиусом R вписана правильная n -угольная призма, боковая грань которой – квадрат. Найдите площади боковой и полной поверхностей призмы и её объём. Найдите радиус шара, касающегося всех рёбер призмы.

ЗАДАЧИ К § 6.4-6.5

Н



- 92** Заполните пропуск в следующем предложении: если две треугольные пирамиды имеют равные основания, то их объёмы пропорциональны их... .
- 93** Как по данной развёртке правильной пирамиды определить её объём?
- 94** Определите, как изменится объём правильной пирамиды, если её высоту увеличить в n раз, а сторону основания уменьшить во столько же раз.

Н

- 95** Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 2 см, а её высота равна 10 см. Найдите объём пирамиды.
- 96** Вычислите объём и площадь полной поверхности правильной четырёхугольной усечённой пирамиды, стороны основания которой равны 24 и 12 см, а высота равна 8 см.

- 97** Основаниями усечённой пирамиды служат квадраты, стороны которых равны a и $2a$; высота этой пирамиды равна h . Определите площадь полной поверхности S и объём V данной пирамиды. Вычислите S и V при $a = 3$ дм и $h = 2$ дм.
- 98** Найдите объём пирамиды, высота которой h , а в основании – прямоугольник со сторонами a и b .
- 99** Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, высота которой h , а диагональ основания d .
- 100** Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, каждое ребро которой равно 1 дм.
- 101** Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна $3\sqrt{2}$ м, а боковое ребро 5 м. Найдите объём пирамиды.
- 102** Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α . Все двугранные углы при основании пирамиды равны γ . Найдите объём пирамиды.
- 103** В правильной треугольной пирамиде высота равна 8 дм, боковое ребро 10 дм. Найдите объём пирамиды.
- 104** Найдите объём пирамиды Хеопса, площадь основания которой 5,3 га, а высота 147 м.
- 105** Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b , а плоский угол при вершине 90° . Найдите объём пирамиды.
- 106** Боковые рёбра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, а их длины равны a , b , c . Найдите объём пирамиды.
- 107** Найдите объём треугольной пирамиды, если длина каждого её бокового ребра a , а плоские углы при вершине 60° , 90° и 90° .
- 108** Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, если её боковое ребро b :
а) наклонено к плоскости основания под углом α ; б) с высотой пирамиды образует угол β ; в) наклонено к стороне основания под углом γ .
- 109** Диагональное сечение правильной шестиугольной пирамиды делит её на две неравные части. Как относятся их объёмы?
- 110** Основанием пирамиды служит правильный треугольник со стороной a . Найдите объём пирамиды, если двугранные углы при рёбрах её основания 90° , 45° и 45° .
- 111** Найдите объём правильного тетраэдра, ребро которого равно a .

- 112** Одно ребро треугольной пирамиды равно b , а каждое из остальных рёбер равно a . Найдите объём пирамиды.
- 113** Основание пирамиды – треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Двугранные углы при каждом ребре основания равны по 45° . Найдите объём пирамиды.
- 114** Основание пирамиды – равнобедренная трапеция со сторонами 4 см, 7 см, 7 см и 10 см, все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите объём пирамиды.
- 115** Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник; боковые грани, проходящие через его катеты, перпендикулярны плоскости основания. Наклонные боковые рёбра равны 2 дм и 3 дм, они образуют с плоскостью основания углы, которые относятся как 2:1. Найдите объём пирамиды.
- 116** Три ребра треугольной пирамиды, выходящие из одной вершины, равны a, b, c ; противолежащие им плоские углы при той же вершине равны α, β, γ . Докажите, что объём треугольной пирамиды выражается формулой:

$$V = \frac{1}{3} abc \sqrt{\sin \delta \sin(\delta - \alpha) \sin(\delta - \beta) \sin(\delta - \gamma)}, \text{ где } \delta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma).$$

- 117** Противолежащие рёбра AB и CO треугольной пирамиды $ABCD$ имеют длины m и n , расстояние между ними равно h , а угол равен φ . Докажите, что объём треугольной пирамиды можно вычислить по формуле: $V = \frac{1}{6} mnhs \sin \varphi$.
- 118** На рёбрах AD и BC треугольной пирамиды $ABCD$ соответственно даны отрезки MN и PQ , причем $MN = \frac{1}{3} AD$, $PQ = \frac{1}{3} BC$. Найдите отношение объёмов треугольных пирамид $ABCD$ и $MNPQ$.
- 119** У правильной треугольной призмы длины всех рёбер равны a . Через середины каждых трёх рёбер, выходящих из одной вершины, проведены сечения. Найдите объём образовавшегося многоугольника.
- 120** Докажите, что любая плоскость, проходящая через середины двух противолежащих рёбер правильной треугольной пирамиды, делит её на части, имеющие равные объёмы.

- 121** Найдите объём правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой имеет длину a и образует с боковой гранью угол α .
- 122** Пары противоположных рёбер треугольной пирамиды $ABCD$ равны: $BC = DA = a$, $CA = BD = b$, $AB = CD = c$. Найдите объём пирамиды.
- 123** Все рёбра треугольной пирамиды, кроме ребра AB , имеют длину a ; значение плоского угла, лежащего против ребра AB , равно α . Найдите объём треугольной пирамиды.
- 124** Сечение, параллельное основанию пирамиды, делит её на две части, имеющие равные объёмы. Найдите отношение площадей частей, на которые разделена боковая поверхность пирамиды.
- 125** Основание пирамиды – правильный треугольник со стороной a . Угол между одной из боковых граней и плоскостью основания равен α , а угол между каждым из боковых рёбер, лежащих в этой грани, и плоскостью основания равен β . Найдите объём пирамиды.
- 126** а) Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник, у которого $AB = BC = 20$ см, $AC = 32$ см; углы между плоскостью основания и каждой из боковых граней равны 45° . Найдите объём пирамиды.
б) Сколько решений будет иметь аналогичная задача, если основанием пирамиды служит: а) разносторонний треугольник; б) равносторонний треугольник?
- 127** Основание пирамиды – прямоугольная трапеция, у которой большая из непараллельных сторон 12 см, а меньший угол 30° . Все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, площадь боковой поверхности 90 см². Найдите объём пирамиды.
- 128** Основание пирамиды $SABC$ – треугольник; $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \alpha$, сторона $AB = c$. Боковые рёбра одинаково наклонены к плоскости основания; угол между гранью SBC и плоскостью основания равен β . Найдите объём пирамиды. Вычислите его при $c = 18$ см, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$.
- 129** Вычислите объём правильной треугольной пирамиды, боковое ребро которой равно m , а плоские углы при вершине пирамиды прямые.
- 130** Основание пирамиды – правильный треугольник, длины боковых рёбер равны 1, объём равен $\frac{1}{6}$. Найдите плоский угол при вершине треугольной пирамиды.
- 131** В шар радиусом R вписана пирамида, основание которой — равнобедренный треугольник с углом при вершине α ; боковые рёбра пирамиды наклонены к основанию под углом φ . Найдите объём пирамиды.

- 132** Через середины каждых трёх рёбер куба, выходящих из одной вершины, проведено сечение. Найдите объём и площадь поверхности полученного многогранника, если ребро куба равно α .
- 133** Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ составляет с плоскостью основания угол α . Через вершину B проведена плоскость, перпендикулярная ребру SD . Какую часть объёма данной пирамиды составляет объём четырёхугольной пирамиды, отделяемой сечением?
- 134** Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна h и составляет с боковой гранью угол α . Через сторону основания пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противоположащей грани. Найдите объём пирамиды, отсекаемой этой плоскостью от данной пирамиды.
- 135** Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a . Найдите объём пирамиды, если: а) угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α ; б) угол между плоскостями боковой грани и основания равен α ; в) плоский угол при вершине пирамиды равен α .
- 136** а) По данным стороне a основания и боковому ребру b правильной n -угольной пирамиды. Найдите её объём.
б) Пользуясь полученной формулой, найдите по данным a и b объёмы правильных треугольной и четырёхугольной пирамид.
- 137** Ученик составил задачу: «В правильной четырёхугольной пирамиде площадь основания равна Q , площадь боковой грани равна $\frac{1}{6} Q$. Найдите её объём». Имеет ли задача решение?
- 138** Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна m , а диагональное сечение равновелико основанию.
- 139** Диагональное сечение правильной шестиугольной пирамиды – прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c . Найдите объём пирамиды.
- 140** Основанием пирамиды служит прямоугольник с площадью Q , две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие образуют с ней углы α и β . Вычислите объём пирамиды.
- 141** Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, параллельные стороны которой a и b ($a > b$), а угол между равными отрезками диагоналей α . Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания, двугранные углы, прилежащие к параллельным сторонам основания, относятся как $1 : 2$. Найдите объём пирамиды.

- 142** Правильная n -угольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через её высоту. Равны ли объёмы полученных пирамид?
- 143** В правильную четырёхугольную пирамиду с плоским углом α при вершине вписан шар; точки касания шара с боковыми гранями и центр шара приняты за вершины новой пирамиды; высота этой пирамиды, проведённая из центра шара, равна h . Найдите объём новой пирамиды.
- 144** Стороны оснований правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равны a и b ($a > b$), острый угол боковой грани равен α . Найдите объём усечённой пирамиды.
- 145** Основания усечённой пирамиды – равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых равны m и n ($m > n$), две боковые грани перпендикулярны основанию, а третья составляет с ним угол α . Найдите объём усечённой пирамиды.
- 146** Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом α между диагоналями. Одно из боковых рёбер перпендикулярно к плоскости основания, а наибольшее из боковых рёбер составляет с плоскостью основания угол β . Радиус шара, описанного около пирамиды, равен R . Найдите объём пирамиды.
- 147** Около шара радиусом r описана четырёхугольная пирамида, в основании которой лежит ромб с острым углом α . Каждая боковая грань пирамиды наклонена к плоскости основания под углом β . Определите объём и площадь полной поверхности пирамиды.
- 148** Прямоугольник $ABCD$ служит основанием пирамиды $SABCD$, высота которой проходит через точку пересечения диагоналей основания и больше 1, а двугранный угол, образованный плоскостями SAB и SBC , равен $\frac{\pi}{2}$. Найдите часть объёма пирамиды, содержащуюся в шаре радиусом 1 с центром в точке S .
- 149** В треугольной пирамиде $ABCD$ $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$. Её достроили до призмы $BCDAC_1D_1$, где $CC_1 \parallel DD_1 \parallel BA$.
- Докажите, что объём пирамиды $ABCD$ в два раза меньше объёма пирамиды ACC_1D_1D .
 - O – точка пересечения диагоналей грани CC_1D_1D . Докажите, что отрезок AO перпендикулярен грани CC_1D_1D .
 - Найдите CD_1 , DC_1 , AO .
 - Найдите объём пирамиды $ABCD$.

150 Два правильных треугольника со стороной a повернуты один относительно другого вокруг общего центра на 60° . На одном треугольнике построена правильная пирамида, на другом – призма, обе с длиной высоты h . Найдите объём их общей части.

151 Дан правильный октаэдр с ребром a .

- а) Докажите, что концы рёбер этого октаэдра, сходящиеся в одной вершине, лежат в одной плоскости.
- б) Докажите, что в каждой вершине правильного октаэдра сходятся две пары перпендикулярных рёбер.
- в) Найдите объём данного октаэдра.
- г) Найдите объём данного октаэдра путем разбиения его на треугольные пирамиды.

ГЛАВА 7

ОБЪЕМЫ ФИГУР ВРАЩЕНИЯ

Греческая математика вечна, даже более вечна, чем греческая литература. Архимеда будут помнить, когда Эсхила забудут, так как языки умирают, а математические идеи – нет.

*Годфри Харолд Харди
(английский математик, 1877–1947)*

§ 7.1



ОБЪЁМ ЦИЛИНДРА

Так же, как в случае нахождения объёма призмы, начнём с рассмотрения свойств поперечных сечений цилиндра.

Определение поперечного сечения цилиндра такое же, как поперечного сечения призмы или пирамиды.

При изучении свойств сечений цилиндра мы практически доказали следующую теорему:

Теорема 44. Каждое поперечное сечение прямого кругового цилиндра есть круг, равный основанию.

Доказательство

На рис. 7.1. плоскость α , параллельная плоскостям оснований цилиндра, задаёт его поперечное сечение. Теорема доказывает, что в сечении получается круг.

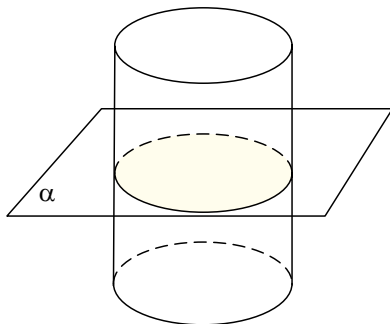


Рис. 7.1

Проведите доказательство этой теоремы самостоятельно.

Из этой теоремы можно получить следствие:



Каждое поперечное сечение кругового цилиндра имеет ту же площадь, что и основание.

Теперь можно вывести формулу для нахождения объёма цилиндра.

Теорема 45. Объём кругового цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.

Доказательство

1. Нам дан круговой цилиндр с площадью основания S и высотой h (рис. 7.2а) (дано).

2. Требуется найти объём цилиндра.

При доказательстве этой теоремы мы будем использовать принцип Кавальери, и для этого проведём следующее построение.

3. Построим произвольную призму (можно прямоугольный параллелепипед), основание которой имеет площадь S , равную площади основания цилиндра; основания цилиндра и призмы лежат в одной плоскости α , по одну сторону от этой плоскости. Высота призмы должна быть равна высоте цилиндра, h (рис. 7.2б).

Оставшуюся часть доказательства теоремы проведите самостоятельно, аналогично доказательству Т.39.

Итак,

$$V_{\text{цилиндра}} = S \cdot h,$$

где S – площадь основания цилиндра, а h – его высота.

Решим задачу на вычисление объёма цилиндра.

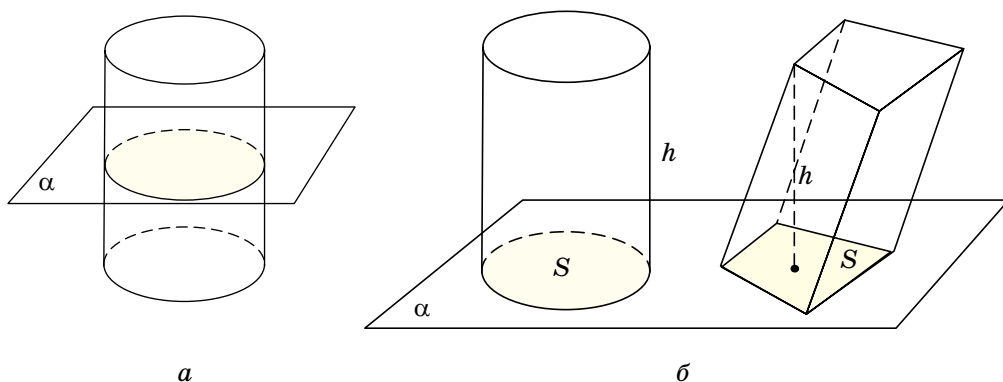


Рис. 7.2.

ЗАДАЧА

Дана правильная треугольная пирамида объёма V . В эту пирамиду вписан цилиндр так, что одно из его оснований принадлежит основанию пирамиды, а другое основание вписано в сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Найти наибольший возможный объём такого цилиндра.

Решение

1. Правильная треугольная пирамида $SABC$, объём её равен V .
2. В пирамиду вписан цилиндр, основание цилиндра принадлежит основанию пирамиды.
3. Найти наибольший возможный объём цилиндра.
4. Высоту пирамиды обозначим H , длину стороны основания – a , высоту цилиндра – h , радиус цилиндра – r (обозначения).

} (дано)
(рис.7.3)

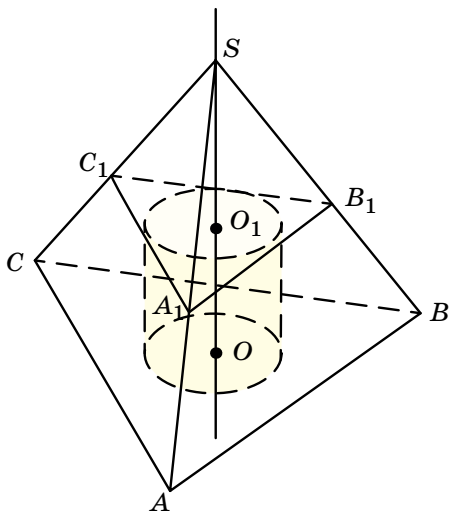


Рис. 7.3

Нам нужно найти наибольший возможный объём цилиндра. Как это сделать? Можно выразить объём цилиндра как функцию, например, высоты цилиндра h и найти максимум этой функции.

5. Рассмотрим сечение $A_1B_1C_1$ пирамиды плоскостью верхнего основания цилиндра. Это правильный треугольник, гомотетичный основанию ABC с коэффициентом гомотетии, равным $(H - h)/H$ (рис. 7.3) (1, 2, свойства гомотетии).

6. Сторона сечения имеет длину $a(H - h)/H$, а радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}(H - h)/6H$. Это и есть радиус цилиндра, т.е. $r = \sqrt{3}(H - h)/6H$ (1, 2, 5).

7. Находим объём цилиндра как функцию h :

$$V_{\text{ц}} = \frac{\pi a^2}{12H^2} (H - h)^2 h, \quad h \in (0; H) \quad (1, 2, 6, \text{ формула объёма цилиндра}).$$

8. Найдём критическую точку этой функции:

$$V'_{\text{ц}} = \frac{\pi a^2}{12H^2} (H - h)(H - 3h), \quad h_0 = \frac{H}{3}.$$

При $h = h_0$ функция $V_{\text{ц}}$ имеет наибольшее значение, равное $\frac{\pi}{81} a^2 H$ (7, свойства экстремума функции).

9. По условию $\frac{\sqrt{3}}{12} a^2 H = V$.

10 (3). Наибольший возможный объём рассматриваемого цилиндра равен

$$\frac{4\sqrt{3}\pi}{81} V \quad (7, 8, 9). \quad \blacksquare$$



ОБЪЁМ КОНУСА

Теперь мы можем вывести формулы объёма конуса. Как и во всех предыдущих случаях, используем некоторые свойства поперечных сечений конуса.

На рис. 7.4. изображено поперечное сечение конуса. Плоскость α параллельна плоскости основания конуса.

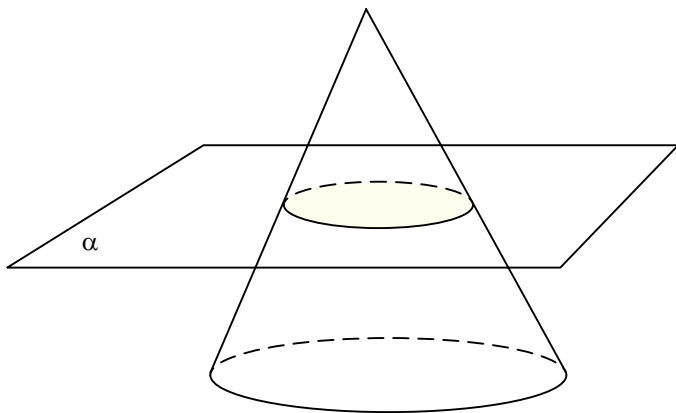


Рис. 7.4.

Докажем важное свойство поперечного сечения конуса.

Теорема 46. Даны конус высоты h и его поперечное сечение, высекаемое плоскостью, удалённой от его вершины на расстояние d . Тогда площадь поперечного сечения конуса равна площади его основания, умноженной на $\frac{k^2}{h^2}$.

Доказательство

Проведём доказательство этой теоремы для произвольного конуса (например, наклонного).

1. Конус с высотой h .
 2. Поперечное сечение, удалённое от вершины V на расстояние k .
- } (дано)
(рис. 7.5а)
3. $S_{\text{сеч}} = \frac{k^2}{h^2} S_{\text{осн}}$ (требуется доказать).

Для удобства рассуждений выделим из рис. 7.5а фрагмент (рис. 7.5б).

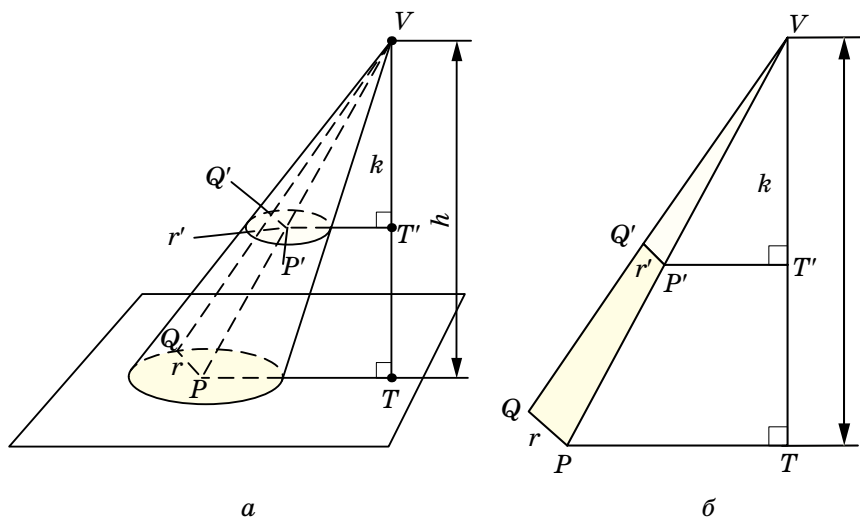


Рис. 7.5

4. $\triangle VPT \sim \triangle VP'T'$ (1,2).

5. $\frac{VP'}{VP} = \frac{VT'}{VT} = \frac{k}{h}$ (4)

6. $\triangle VPP'Q' \sim \triangle VPP'Q$ (1, 2).

7. $\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{VP'}{VP} = \frac{k}{h}$ и $P'Q' = \frac{k}{h} PQ$ (6).

8. Если точка Q основания принадлежит окружности с центром P и радиусом r , то точка Q поперечного сечения принадлежит окружности с центром P' и радиусом

$$r' = \frac{k}{h} PQ = \frac{k}{h} r \quad (7).$$

9. Поперечное сечение есть круг радиуса r' , а его площадь равна $\pi \frac{k^2}{h^2} r^2 = \frac{k^2}{h^2} \pi r^2$ (1,2,8).

$$S_{\text{сеч}} = \frac{k^2}{h^2} S_{\text{осн}} \text{ (9, формула площади круга). } \blacksquare$$

Теперь, пользуясь принципом Кавальери, мы можем вывести формулу вычисления объёма кругового конуса.

Теорема 47. Объём кругового конуса равен одной трети произведения площади его основания на высоту.

Доказательство похоже на доказательство Т.40: надо сравнить конус с треугольной (или с произвольной) пирамидой с теми же площадью основания и высотой (рис. 7.6). Проведите это доказательство самостоятельно.

Итак,

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} S \cdot h,$$

где S – площадь основания конуса, а h – его высота.

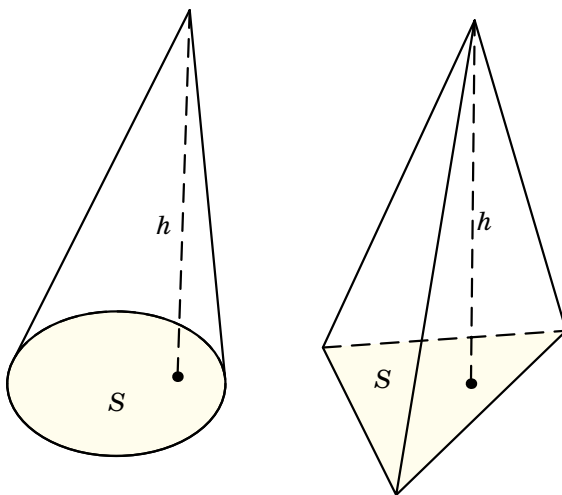


Рис. 7.6

Решим задачу на вычисление объёма конуса.

ЗАДАЧА

Найдите объём конуса, образующая которого видна из середины высоты конуса под углом α .

Решение

1. Конус с образующей l .
2. $PO = H$ – высота конуса, M – середина высоты.
3. PA видна из точки M под углом α .
4. Найти V конуса.

(дано)
(рис. 7.7)

5. $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot PO$ (1, формула объёма конуса).

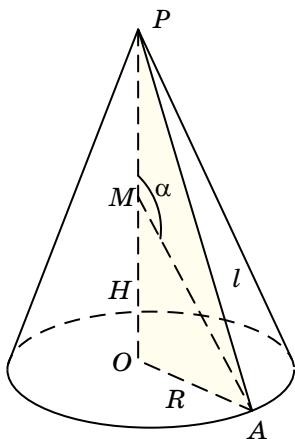


Рис. 7.7

Итак, решение задачи сводится к нахождению площади основания конуса и его высоты.

6. $S_{\text{осн}} = \pi R^2 = \pi OA^2$ (рис. 7.7) (1, формула площади круга).

7. $\triangle AMO$ – прямоугольный.

$MO = AO \cdot \text{ctg}(\pi - \alpha) = -AO \cdot \text{ctg} \alpha = -R \cdot \text{ctg} \alpha$ (1, 2, 3, определение котангенса).

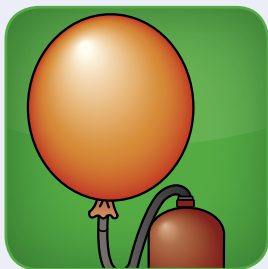
8. $PO = 2MO = -2R \cdot \text{ctg} \alpha$ (2, 7).

9. Из $\triangle PAO$ по теореме Пифагора имеем $R^2 + (-2R \cdot \text{ctg} \alpha)^2 = l^2$, $R = \frac{l}{\sqrt{1+4\text{ctg}^2 \alpha}}$ (2, 7, 8, теорема Пифагора).

Мы нашли радиус основания конуса, найдём его высоту H .

10. $H = -2R \cdot \text{ctg} \alpha = \frac{-2l \cdot \text{ctg} \alpha}{\sqrt{1+4\text{ctg}^2 \alpha}}$ (1, 2, 9, определение котангенса).

$$5. V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{l}{\sqrt{1+4\text{ctg}^2 \alpha}} \right) \left(\frac{-2l \cdot \text{ctg} \alpha}{\sqrt{1+4\text{ctg}^2 \alpha}} \right) = -\frac{2\pi l^2 \cdot \text{ctg} \alpha}{3\sqrt{(1+4\text{ctg}^2 \alpha)^2}} \quad (9, 10). \quad \blacksquare$$



ОБЪЁМ ШАРА

Как и в предыдущих случаях для вычисления объёма шара мы будем использовать принцип Кавальери. Чтобы применить этот принцип к задачам, связанным с шаром, нам нужно подобрать какую-то другую фигуру, имеющую на каждом уровне поперечные сечения той же площади, что и шар.

Считается, что первым формулу вычисления объёма шара получил великий Архимед в III веке до н.э. Объём шара Архимед нашёл двумя способами. Первый способ заключался в составлении интегральных сумм и, по существу, был очень близок к современному методу интегрирования. Второй, более элементарный способ Архимеда состоял в использовании механического принципа, включающего в себя принцип поперечных сечений.

Архимед установил, что *объём шара в полтора раза меньше объёма цилиндра, описанного около шара*: $V_{\text{ш}} = \frac{2}{3} V_{\text{цил}}$.

Этот результат Архимед считал самым большим своим достижением. По завещанию учёного на его могиле был высечен шар, вписанный в цилиндр. Именно по этому признаку могилу Архимеда через полтора столетия разыскал Цицерон. Позже она была вновь утрачена.

Попробуем восстановить ход возможных рассуждений, который приводит к выводу формулы объёма шара.



1. Возьмём круг радиуса R и опишем около него квадрат. Проведём диагонали квадрата (рис. 7.8а).

2. Представим себе, что эта фигура вращается вокруг вертикальной оси AB .

3. Мы получим шар радиуса R , описанный около шара цилиндр и вписанный в цилиндр двойной круговой конус с вершиной в центре шара O .



Как же получатся сечения, которые нам будут нужны?

4. Возьмём точку C на оси AB и проведём прямую MN на некотором расстоянии x от центра O (рис. 7.8б).

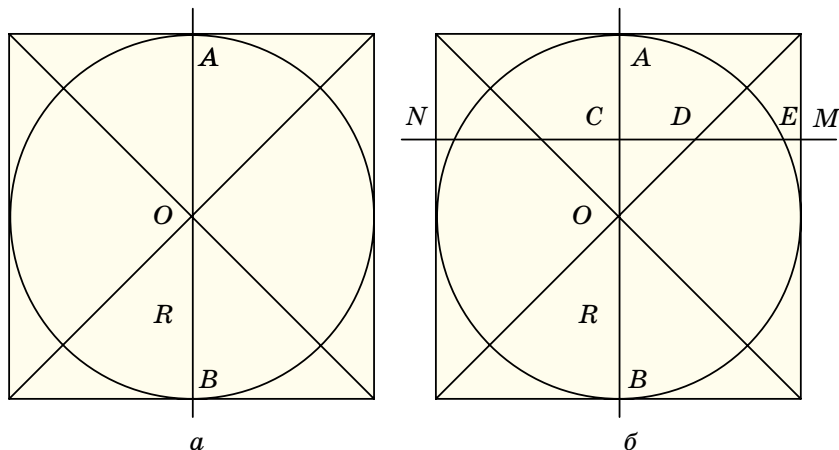


Рис. 7.8

5. Опять будем вращать полученную фигуру вокруг оси AB , при этом получим от вращения прямой MN некоторую плоскость сечения всей полученной комбинации фигур. На рис. 7.9 изображены все полученные фигуры и соответствующая плоскость.

6. Плоскость a в сечении с цилиндром образует круг радиуса $CM = R$, в сечении с конусом – круг радиуса $CD = OC = x$ (так как угол при вершине конуса прямой) и в сечении с шаром – круг радиуса CE (4, 5).

7. По теореме Пифагора $OE^2 = CE^2 + OC^2$, или $CM^2 = CE^2 + CD^2$ (6, теорема Пифагора).

8. Умножив обе части этого соотношения на число π , получим $\pi \cdot CM^2 = \pi \cdot CE^2 + \pi \cdot CD^2$, т.е. $S_{\text{ц}} = S_{\text{ш}} + S_{\text{к}}$, где $S_{\text{ц}}$, $S_{\text{ш}}$, $S_{\text{к}}$ – соответственно, площади кругов, получающихся при пересечении цилиндра, шара и конуса плоскостью a (6, 7, формула площади круга).

9. Соотношение выполняется для любых других сечений цилиндра, шара, и конуса, лежащих в одной и той же горизонтальной плоскости. Вспоминая

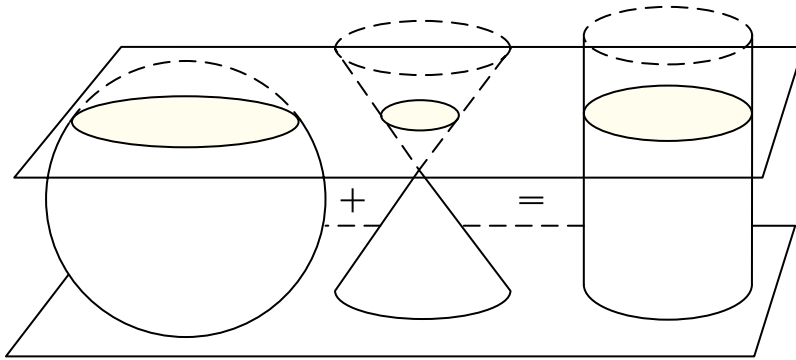


Рис. 7.9

принцип Кавальери, перейдём от соотношения для площадей к такому же соотношению для объёмов: $V_{\text{ц}} = V_{\text{ш}} + V_{\text{к}}$ (8, принцип Кавальери).

10. Так как объём цилиндра втрое больше объёма вписанного в него «двойного» конуса (у которого те же основание и высота), т.е. $V_{\text{к}} = \frac{1}{3} V_{\text{ц}}$, мы получим результат Архимеда: $V_{\text{ш}} = V_{\text{ц}} - V_{\text{к}} = V_{\text{ц}} - \frac{1}{3} V_{\text{ц}} = \frac{2}{3} V_{\text{ц}}$, т.е. объём шара в полтора раза меньше объёма описанного цилиндра.

Итак, мы воспроизвели вывод замечательного результата Архимеда.

Теперь приведём вывод формулы объёма шара в более привычном для нас варианте.

1. Пусть полушар радиуса R и цилиндр, диаметр основания которого равен диаметру шара, а высота равна радиусу шара, расположены так, что большой круг полушара и нижнее основание цилиндра находятся в одной плоскости α (дано) (рис. 7.10а).

Мы хотим использовать для нахождения формулы объёма шара принцип Кавальери, а значит надо иметь две такие фигуры, при сечении которых плоскостью, параллельной плоскости α , мы бы получали фигуры равных площадей. Ясно, что при пересечении полушара и цилиндра таких фигур получить нельзя.

Выполним следующее построение.

2. Из цилиндра вырезан конус, вершина которого находится в центре нижнего основания цилиндра, а основание совпадает с верхним основанием цилиндра (построение) (рис.7.10б).

3. Проведём плоскость, параллельную плоскости α и пересекающую полушар и цилиндр. Пусть расстояние этой плоскости от данной плоскости α будет равно l (построение) (рис. 7.10а).

На рис.7.10б вы видите, что в сечении с полушаром получится круг, а в сечении с цилиндром (включая конус) получится кольцо (эти фигуры заштрихованы на рис.7.10б). Сравним их площади.

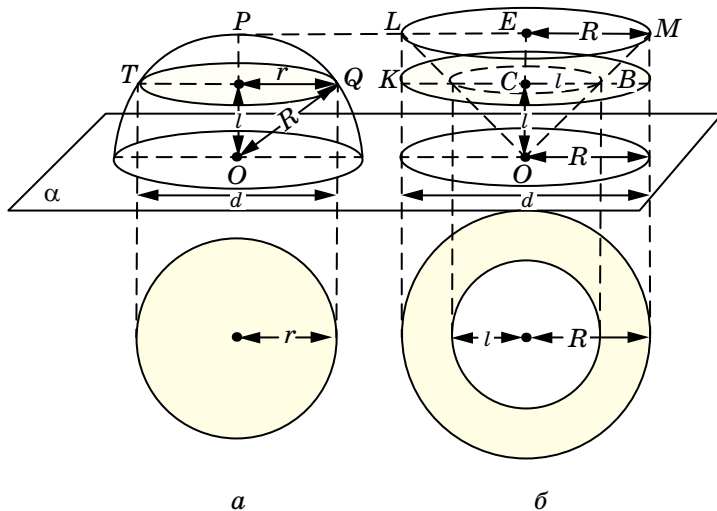


Рис. 7.10

4. Радиус круга, полученного в сечении шара плоскостью, $r = \sqrt{R^2 - l^2}$. Площадь этого круга равна $\pi r^2 = \pi (R^2 - l^2)$ (3, формула площади круга).

5. В круговом кольце радиус внешней окружности равен R , а внутренней l (прямоугольный треугольник OBC равнобедренный, так как $\angle COB = 45^\circ$). Следовательно, площадь полученного кольца равна $\pi R^2 - \pi l^2 = \pi(R^2 - l^2)$.

6. В сечении произвольной плоскостью, параллельной плоскости a , получились фигуры одинаковой площади (4, 5).

7. Исходя из принципа Кавальери, приходим к выводу, что объёмы полушара и фигуры, полученной путем удаления конуса из цилиндра, равны (6, принцип Кавальери).

$$8. \frac{1}{2}V_{\text{шара}} = V_{\text{цил}} - V_{\text{кон}}, \text{ или } \frac{1}{2}V_{\text{шара}} = \pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 \quad (7).$$

$$9. V_{\text{шара}} = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi d^3 \quad (8).$$

$$\text{Итак, } V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

где R – радиус шара.

Теорема 48. Объём шара выражается через его радиус по формуле $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R – радиус шара.

Решим задачу на нахождение объёма шара.

ЗАДАЧА

Найдите объём шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, сторона основания которой a , а двугранный угол при ребре основания α .

Решение

- | | | |
|--|---|------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Правильная треугольная пирамида с ребром a. 2. Двугранный угол при ребре основания α. 3. Шар, вписанный в данную пирамиду. 4. Найти объём шара. | } | <p>(дано)</p> <p>(рис.7.11, а)</p> |
|--|---|------------------------------------|
5. $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$ (4, формула объёма шара).

Решение задачи сводится к нахождению радиуса шара. Прежде всего, изучим данные задачи.

6. Центр шара, точка O , лежит на высоте пирамиды (1,3, свойства шара, вписанного в правильную пирамиду) (рис. 7. 11б).

7. Проведём высоту пирамиды PO , O – центр окружности, описанной около основания пирамиды (построение) (рис.7. 11б) (свойство правильной пирамиды).

8. Шар касается боковой грани пирамиды $\triangle PAB$ в некоторой точке K , лежащей на апофеме PM (1,3, свойство шара, вписанного в правильную пирамиду).

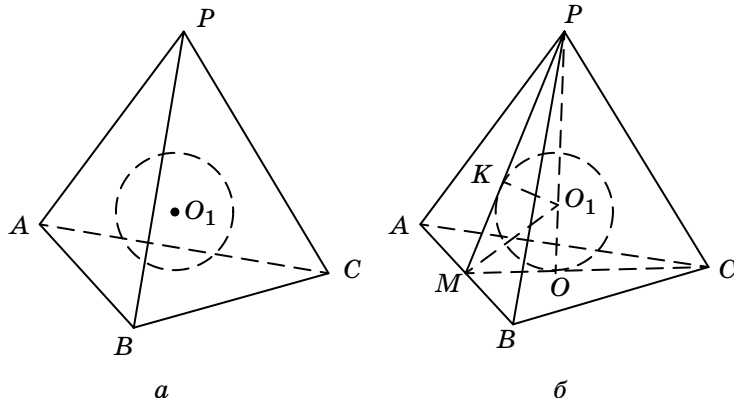


Рис. 7.11

9. $OM = \frac{1}{2} OC = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ (2, 7, формула для нахождения радиуса окружности,

вписанной в правильный треугольник).

Теперь мы можем использовать данные п.2. Прежде всего следует определить, где на рис. 7.11б изображен $\angle \alpha$.

10. $\angle PMO = \alpha$ (1, 2, 3, 7, 8, определение линейного угла двугранного угла).

Нам нужно найти радиус шара OO_1 . Как его можно найти? OO_1 можно найти из треугольника OO_1M .

11. Прямоугольные треугольники $\triangle O_1OM = \triangle O_1KM$ (по двум катетам, поэтому $\angle O_1OM = \frac{1}{2} \angle PMO = \frac{\alpha}{2}$).

12. Из $\triangle O_1OM$ находим: $OO_1 = OM \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

13 (4). Объём шара $V = \frac{4}{3}\pi OO_1^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{54} \pi a^3 \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$.

§ 7.4



ОБЪЁМЫ ЧАСТЕЙ ШАРА

В учебнике геометрии для 10 класса мы давали определения частям шара и изучали некоторые их свойства. Теперь найдём объём этих фигур.

Объём шарового сегмента.

В §5.6. «Части круга, сферы и шара» учебника геометрии для 10 класса мы рассмотрели шаровой сегмент как часть шара, отсекаемую от него плоскостью (рис. 7.12).

Для нахождения объёма шарового сегмента применим те же рассуждения, как и при выводе формулы объёма шара.

1. На данной плоскости помещены полушар радиуса R и цилиндр, диаметр основания которого равен диаметру шара, а высота равна радиусу шара (рис. 7.12).

2. Из цилиндра вырезан конус и проведена плоскость, параллельная той, на которой помещены данные тела.

3. Площади сечений двух тел, т.е. шара и тела, полученного из цилиндра путём удаления конуса, равны.

4. Приходим к выводу, что и объёмы двух тел, т.е. объём шарового сегмента TPQ и тела, полученного из цилиндра $KLMN$ путём удаления из него усечённого конуса, тоже равны.

5. $V_{\text{шар.сегм.}} = V_{\text{цил}} - V_{\text{ус.кон.}}$, или

$$V_{\text{шар.сегм.}} = \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3} (R^2 + l^2 + Rl).$$

6. $l = R - h$, а тогда $V_{\text{шар.сегм.}} =$

$$= \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3} (R^2 + R^2 - 2Rh + h^2 + R^2 - Rh).$$

$$7. V_{\text{шар.сегм.}} = \pi R^2 h - \pi R^2 h + \pi R h^2 - \frac{\pi h^3}{3}.$$

Окончательно получаем:

Теорема 49. Объём шарового сегмента находится по формуле $V_{\text{шар.сегм.}} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$, где R – радиус шара, h – высота шарового сегмента.

Объём шарового сектора

Мы знаем, что выпуклый шаровой сектор состоит из объединения шарового сегмента и соответствующего конуса (рис. 7.13). Это подсказывает нам ход рассуждений.

1. Объём шарового сектора (рис. 7.13) может быть получен как сумма объёмов шарового сегмента и конуса, т.е.

$$V_{\text{шар.сегм.}} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) + \frac{1}{3} \pi r^2 l.$$

$$2. l = R - h \text{ и } r^2 = h(2R - h) = 2Rh - h^2.$$

$$3. V_{\text{шар.сегм.}} = \frac{\pi}{3} (3Rh^2 - h^3 + (2Rh - h^2)(R - h)) = \frac{\pi}{3} (3Rh^2 - h^3 + (1, 2). \\ + 2R^2h - Rh^2 - 2Rh^2 + h^3) = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$

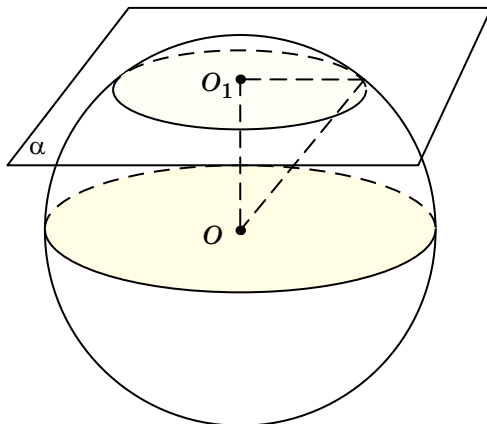


Рис. 7.12

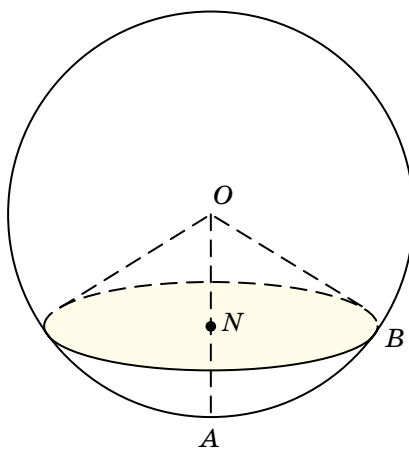


Рис. 7.13

Итак,

Теорема 50. Объём шарового сектора находится по формуле $V_{\text{шар.сект.}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$, где R – радиус шара, h – высота шарового сегмента, присоединением к которому получен шаровой сектор.

Решим следующую задачу.

ЗАДАЧА

В шаре, диаметр которого равен 50 мм, должно быть просверлено цилиндрическое отверстие вдоль диаметра шара. Вычислите объём остающегося кольцеобразного тела (с точностью до 0,5 см³, если диаметр цилиндрического отверстия равен 30 мм).

Решение

1. Шар с диаметром 50 мм и центром O .
2. В шаре просверлили цилиндрическое отверстие, параллельное диаметру шара, диаметр цилиндрического отверстия равен 30 мм.
3. Найдите объём оставшейся части шара.

} (дано)
(рис. 7.14)

Для решения этой задачи полезно рассмотреть осевое сечение полученной конструкции.

4. Построим осевое сечение получившегося кольцеобразного тела (рис. 7.14) (построение).

5. Высверленная часть шара состоит из цилиндра и двух сегментов, следовательно, искомый объём равен объёму шара без объёма цилиндра и суммы объёмов двух сегментов (1, 2, свойство объёмов).

7. Высота цилиндра $H=2OB$. Из прямоугольного треугольника AOB находим $OB = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ мм, следовательно, $H = 40$ мм (1, 2, 4, теорема Пифагора).

8. Высота h каждого сегмента равна $\frac{50-40}{2} = 5$ мм (1, 2, 4).

9. Обозначим искомый объём буквой V , тогда

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi r^2 H - 2\pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h \right).$$

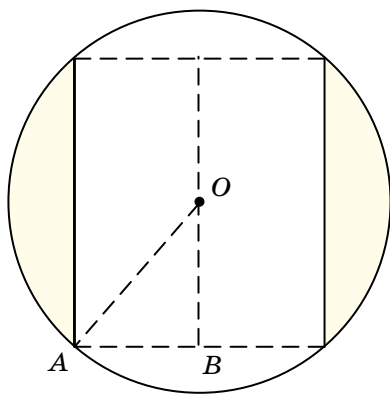


Рис. 7.14

После подстановки в правую часть равенства вместо R , r , H и h их значений получим:

$$V = \pi \left(\frac{4}{3} \cdot 25^3 - 15^2 \cdot 40 - 2 \cdot 25 \cdot 5^2 + \frac{2}{3} \cdot 5^3 \right).$$

После окончательного подсчёта, приняв $\pi = 3,14$, имеем: $V = 34 \text{ см}^3$.

РАЗВИВАЕМ УМЕНИЯ

ЗАДАЧИ К § 7.1

Н



- 1** Как изменится объём цилиндра, если его высоту и диаметр основания:
а) увеличить в 2 раза; б) уменьшить на 50%; в) увеличить в 4 раза?
- 2** Произведите необходимые измерения и вычислите объём модели прямого цилиндра.
- 3** Найдите объём прямого цилиндра, высота которого 5, а радиус основания 3.
- 4** Найдите высоту прямого цилиндра, если его объём равен 64, а диаметр основания 16.
- 5** Основание цилиндра – круг диаметром 8. Высота цилиндра также равна 8. Чему равен объём цилиндра?
- 6** Осевое сечение цилиндра – квадрат со стороной a . Найдите объём цилиндра.

Н

- 7** Диагональ осевого сечения цилиндра равна d и наклонена к плоскости основания под углом α . Найдите объём цилиндра.
- 8** Найдите объём цилиндра, вписанного в куб, ребро которого равно a .
- 9** Найдите объём шахтного ствола диаметром 8 м, если его глубина 500 м.
- 10** В цилиндрический сосуд, внутренний диаметр которого 20 см, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 12 см. Чему равен объём детали?

- 11** Развёртка боковой поверхности цилиндра – квадрат со стороной 1,8 дм. Найдите объём цилиндра.
- 12** Длины двух круглых брёвен равны, а их диаметры относятся как 2 : 3. Как относятся их объёмы?
- 13** Докажите, что объём цилиндра, описанного около правильной четырёхугольной призмы, в 2 раза больше объёма цилиндра, вписанного в эту призму.
- 14** Найдите отношение объёмов цилиндров, вписанного в правильную треугольную призму и описанного около этой призмы.
- 15** Площади боковых поверхностей двух цилиндров равны. Докажите, что их объёмы относятся как радиусы оснований.
- 16** Стальная болванка имеет форму правильной четырёхугольной призмы со стороной основания 0,4 м и высотой 1 м. Сколько метров проволоки диаметром 5 мм можно изготовить из этой болванки вытягиванием?
- 17** Кабель диаметром 50 мм заключается в свинцовую оболочку толщиной 2,5 мм. На изготовление оболочки израсходована 1 т свинца. Вычислите длину кабеля. (Плотность свинца 11,4 г/см³.)
- 18** Стальной вал, имеющий 97 см в длину и 8,4 см в диаметре, обтачивается так, что диаметр уменьшается на 0,20 см. На сколько уменьшится масса вала в результате обточки? (Плотность стали 7,4 г/см³.)
- 19** Диагональ прямоугольника составляет с одной из его сторон угол α . Найдите отношение объёмов цилиндров, образованных вращением прямоугольника около каждой из смежных сторон.
- 20** В цилиндр вписана правильная треугольная призма, объём которой равен V , а отношение стороны основания к боковому ребру равно $\sqrt{3}$. Найдите объём цилиндра.
- 21** Параллельно оси цилиндра проведено сечение, отстоящее от оси на расстоянии d и отсекающее от окружности основания дугу величиной α . Площадь сечения равна S . Вычислите объём цилиндра.
- 22** Развёртка боковой поверхности цилиндра – прямоугольник, в котором угол между диагоналями, обращённый к стороне развёртки, соответствующей образующей цилиндра, равен α . Длина окружности основания цилиндра равна s . Найдите объём цилиндра.
- 23** В цилиндре проведено сечение, параллельное оси; диагональ сечения длиной d составляет с основанием цилиндра угол φ , а меньшая из дуг, отсечённая от окружности основания, равна α . Найдите: а) объём цилиндра; б) площадь боковой поверхности цилиндра.

- 24** Плоскость, проходящая через центр нижнего основания цилиндра под углом φ к основанию, пересекает верхнее основание по хорде длины a , стягивающей дугу величиной α . Найдите объём цилиндра.

П

- 25** На полке в магазине стоят две банки земляничного варенья одного розлива. Одна банка в 2 раза выше другой, но зато её диаметр в 2 раза меньше. Высокая банка стоит 23 рубля, а низкая 43 рубля. Какую банку купить выгоднее?
- 26** В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 дм. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй сосуд, диаметр которого в 2 раза больше первого?
- 27** Сколько метров стальной проволоки в мотке, если его масса 30 кг, а диаметр проволоки 6 мм? Плотность стали 7600 кг/м³.
- 28** Железобетонная панель имеет размеры 600 см × 120 см × 22 см. По всей её длине сделаны 6 цилиндрических отверстий, диаметры которых 14 см. Найдите массу панели, если плотность материала 2,5 г/м³.
- 29** Сколько тонн стальных труб пошло на сооружение газопровода Уренгой – Помары – Ужгород длиной 4451 км, если его внешний диаметр 1420 мм, а толщина трубы 22 мм? Плотность стали 7600 кг/м³.
- 30** Сколько квадратных метров бумаги в рулоне, высота которого 85 см, а радиусы 45 см и 2 см? Толщина бумаги 0,1 мм.
- 31** Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси – квадрат, отсекающий от окружности основания радиусом r дугу β . Найдите объём цилиндра
- 32** В сферу радиусом R вписан цилиндр радиусом r . Найдите объём цилиндра.
- 33** Площадь боковой поверхности цилиндра равна S , площадь его основания Q . Найдите объём цилиндра.
- 34** Развёртка боковой поверхности цилиндра – квадрат со стороной a . Найдите объём цилиндра.
- 35** Диагональ развёртки боковой поверхности цилиндра равна d . Найдите угол между диагональю развёртки и её основанием, при котором объём цилиндра будет наибольшим.
- 36** Цилиндрический шлифовальный круг диаметром 350 мм и шириной 60 мм сточили по диаметру на 3 мм. На сколько процентов уменьшилась: а) масса шлифовального круга; б) рабочая поверхность?

- 37** Цилиндр, осевое сечение которого – квадрат, назовём равносторонним. Найдите площадь полной поверхности и объём равностороннего цилиндра высотой H . Найдите объём равностороннего цилиндра, площадь полной поверхности которого равна S .
- 38** Через диаметр нижнего основания цилиндра проведена плоскость β , образующая с основанием угол φ . Найдите объём отсечённой меньшей части цилиндра, если известно, что радиус цилиндра равен R и плоскость β не пересекает верхнее основание.
- 39** Длина диагонали правильной четырёхугольной призмы d , острый угол между диагоналями призмы α . Найдите объём цилиндра, вписанного в призму.
- 40** В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, у которого диагональ длиной d составляет с меньшей боковой гранью угол α . Диагональ основания параллелепипеда составляет с большей стороной основания угол 2α . Найдите объём цилиндра.
- 41** Правильная прямая треугольная призма $ABCA'B'C'D'$ описана около шара радиусом r . Точка M – середина бокового ребра BB' , точка N – середина бокового ребра CC' . В шар вписан прямой цилиндр так, что его основание лежит в плоскости AMN . Найдите объём этого цилиндра.
- 42** В конус с радиусом основания R и высотой H вписан цилиндр. Найдите линейные размеры цилиндра, при которых его объём наибольший.
- 43** В сферу радиусом R впишите цилиндр, у которого наибольшее значение имеет: а) объём; б) площадь боковой поверхности; в) площадь полной поверхности. Вычислите эти экстремальные величины.
- 44** В полушар вписан цилиндр наибольшего объёма так, что ось цилиндра совпадает с осью полушара. В образовавшийся шаровой сегмент таким же образом вписан другой цилиндр наибольшего объёма. Найдите отношение объёмов цилиндров.
- 45** В полусферу радиусом R вписан цилиндр, у которого наибольшее значение имеет: а) объём; б) площадь боковой поверхности; в) площадь полной поверхности. Известно, что образующая цилиндра лежит на диаметре большого круга полусферы, а его основания имеют по одной общей точке с полусферой. Вычислите эти экстремальные величины.
- 46** Шар пересечён цилиндром, ось которого является диаметром шара. Найдите объём части цилиндра, находящейся вне шара, если радиус шара равен R , а радиус основания цилиндра r .

- 47** Как изменится объём конуса, если: а) его высота увеличится в n раз, а радиус основания останется без изменений; б) его радиус основания уменьшится в n раз, а высота останется без изменений; в) высота и радиус основания увеличатся в n раз; г) его высота увеличится в n раз, а радиус основания уменьшится во столько же раз?
- 48** Найдите объём конуса с высотой 12 и радиусом основания 3,2.
- 49** Найдите высоту прямого конуса, если его объём равен 48, а диаметр основания равен 8.
- 50** Конический бак имеет глубину 3 м, а его круглый верх имеет радиус 1,5 м. Сколько литров жидкости вмещает бак?

- 51** Выразите объём конуса как функцию его высоты h и длины s окружности его основания.
- 52** На станции железной дороги насыпана конусообразная куча угля; её высота 3,8 м, уклон 1 : 1,2. Сколько нужно вагонов для перевозки этого угля (грузоподъёмность вагона 25 т).
- 53** Треугольник вращается около стороны, а затем около внешней прямой, параллельной той же стороне и отстоящей от нее на расстоянии d (вершина, противоположная стороне, удалена от оси более чем на d). Докажите, что разность объёмов полученных тел вращения равна произведению площади треугольника на $2\pi d$.
- 54** В треугольнике две стороны равны b и c , тупой угол между ними α . Найдите объём тела, образованного вращением треугольника около стороны длиной b .
- 55** Площадь прямоугольного треугольника равна S , один острый угол α . Найдите объём тела, образованного вращением треугольника около его гипотенузы.
- 56** Радиусы оснований усечённого конуса равны R и r , образующая наклонена к основанию под углом 45° . Найдите объём усечённого конуса.
- 57** Докажите, что если треугольник ABC вращается вокруг стороны BC , длина которой равна a , то объём полученного тела $V = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{S^2}{a}$, где S — площадь треугольника.

- 58** Дан прямоугольный треугольник с катетами a и b . Найдите отношение объёмов конусов, полученных в результате его вращения вокруг каждого из катетов.
- 59** В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a , двугранный угол при основании равен α . Найдите объём: а) вписанного конуса; б) описанного конуса.
- 60** В конус, образующая которого составляет с основанием угол α , вписан шар радиуса r . Найдите объём конуса.
- 61** а) В шар радиуса R вписывают различные конусы. У какого конуса объём наибольший? Чему он равен?
б) Около шара радиуса r описывают различные конусы. У какого конуса объём наименьший? Чему он равен?
- 62** Ромб со стороной a и углом α вращается вокруг оси, проходящей через вершину угла α и перпендикулярной стороне. Найдите объём тела вращения.
- 63** Имеется два конуса одинакового зерна, один вдвое выше второго. Во сколько раз в первом конусе больше зерна, чем во втором?
- 64** Найдите объём конуса, развёртка боковой поверхности которого – полуокруг радиуса 12 см.
- 65** В шар радиусом $2r$ вписан конус, радиус основания которого r . Найдите объём конуса.
- 66** Найдите объём конуса, образующая которого l видна из середины высоты конуса под углом α .
- 67** Усечённый конус имеет высоту 8, а радиусы его верхнего и нижнего оснований равны 4 и 6. Определите, чему равен его объём.

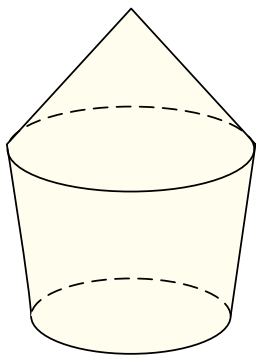


Рис. 7.16

- 68** Выразите объём усечённого конуса как функцию его высоты h и длин окружностей его оснований l и c .
- 69** Вычислите объём стога, имеющего форму, изображённую на рис. 7.16, если длина окружности нижнего основания усечённого конуса равна 15 м, длина окружности верхнего основания 18 м, высота нижней части стога 3,6 м, а высота верхней части 3 м.
- 70** Коническая куча зерна имеет высоту 2,4 м, её окружность основания 20 м. Сколько тонн зерна в куче, если масса 1 м^3 зерна равна 750 кг?

- 71** В основании конуса хорда длины a стягивает дугу 2α ; угол между образующей конуса и плоскостью основания равен φ . Найдите объём конуса.
- 72** Прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим углом β вращается вокруг гипотенузы. Найдите объём фигуры вращения.
- 73** Круговой сектор с радиусом R и центральным углом, равным α радиан, является развёрткой боковой поверхности конуса. Найдите объём этого конуса.
- 74** Для изготовления конической воронки из жести вырезают круговой сектор радиусом R . Найдите центральный угол сектора, при котором получается воронка наибольшей вместимости.
- 75** а) Радиусы оснований усечённого конуса равны 1 дм и 9 дм, образующая равна 1 м. Найдите объём конуса.
б) Радиусы оснований усечённого конуса R и r ($R > r$). Найдите отношение объёма усечённого конуса к объёму конуса, частью которого является данный усечённый конус.
- 76** Диаметры концов бревна 32 см и 26 см, его длина 5,3 м. Из бревна изготовлен прямоугольный брус с наибольшим квадратным сечением. Сколько процентов от объёма бревна составит объём бруса?
- 77** Размеры бидона указаны на рис. 7.17 (в миллиметрах). Найдите ёмкость бидона (в литрах).
- 78** Ромб со стороной a и острым углом α вращается вокруг оси, проведённой через вершину острого угла, перпендикулярно стороне ромба. Найдите объём фигуры вращения.

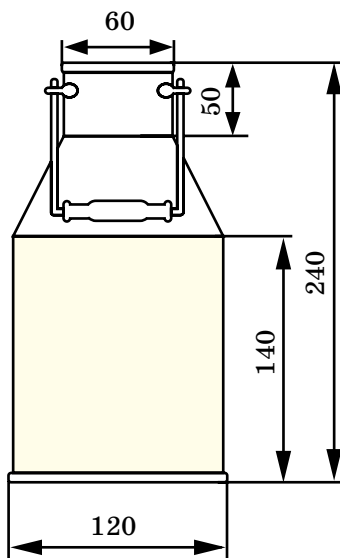


Рис. 7.17

П

- 79** Найдите объём конуса, диаметр основания которого равен d , а угол при вершине осевого сечения равен α .
- 80** Треугольник со сторонами 25 дм, 29 дм, 36 дм вращается вокруг: а) большей стороны; б) меньшей стороны. Найдите отношение объёмов фигур вращения, полученных в первом и во втором случаях.

- 81** Треугольник ABC со стороной $BC = a$ и площадью S вращается вокруг прямой BC . Докажите, что объём образованного тела вращения равен $\frac{4}{3} \pi \frac{S^2}{a}$.
- 82** Известно, что две взаимно перпендикулярные образующие конуса делят окружность его основания на дуги 120° и 240° . Найдите объём конуса, если его высота равна h .
- 83** Конус, диаметр которого равен образующей, называют равносторонним конусом.
- а) Найдите площадь полной поверхности и объём равностороннего конуса, высота которого равна H .
- б) Площадь полной поверхности равностороннего конуса равна S . Найдите его объём.
- 84** Площади полных поверхностей конуса и цилиндра равны. Найдите отношение их объёмов.
- 85** Объёмы равносторонних конуса и цилиндра равны. Найдите отношение площадей их боковых поверхностей.
- 86** Ромб площадью Q вращается вокруг из одной из своих сторон. Объём фигуры вращения равен V . Найдите углы ромба. Вычислите их при $Q = 18 \text{ см}^2$, $V = 180 \text{ см}^3$.
- 87** Параллелограмм со сторонами a и b и острым углом α вращается вокруг прямой, содержащей сторону a . Найдите объём и площадь полной поверхности фигуры вращения.
- 88** Равнобедренный треугольник ABC с углом α при вершине A вращается вокруг прямой AC . При каком значении α объём фигуры вращения будет наибольшим, если длина стороны AC – величина постоянная?
- 89** Высота прямого конуса равна 15, а радиус основания 8. В конусе просверлили цилиндрическое отверстие диаметром 4, ось которого совпадает с осью конуса. Вычислите объём оставшегося тела.
- 90** Дан прямоугольник $ABCD$. Отрезок PQ параллелен отрезку AB и не принадлежит плоскости прямоугольника $ABCD$. Проведём отрезки PA , PD , QB , QC . Длина перпендикуляра, опущенного из любой точки отрезка PQ на плоскость прямоугольника $ABCD$, равна h . Пусть $AD = a$, $AB = b$, $PQ = c$. Докажите, что объём тела $ABCDPQ$ равен $\frac{1}{6} ah(2b+c)$.
- 91** Даны два конуса. Высота первого вдвое меньше высоты второго, а радиус основания первого вдвое меньше радиуса основания второго. Сравните их объёмы.

- 92** Два конуса имеют общее основание. В общем осевом сечении образующая одного из них перпендикулярна противоположащей образующей другого. Объём одного из конусов вдвое меньше объёма другого. Найдите угол между образующей большего конуса и плоскостью основания конусов.
- 93** Два конуса имеют концентрические основания и общую высоту, равную h . Разность углов, которые образующие составляют с осью, равна β , угол между образующей внутреннего конуса и плоскостью основания равен α . Найдите объём части пространства, заключённой между поверхностями конусов.
- 94** Высота цилиндра равна высоте конуса. Площадь боковой поверхности цилиндра относится к площади боковой поверхности конуса как $3 : 2$. Известно, что угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α . Найдите отношение объёма цилиндра к объёму конуса.
- 95** Объём конуса равен V . Найдите объём правильной n -угольной пирамиды, вписанной в конус, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$.
- 96** В конус с радиусом основания R и углом α между образующей и плоскостью основания вписана прямая треугольная призма так, что одно из её оснований лежит на основании конуса, а вершины другого основания принадлежат его боковой поверхности. Найдите объём призмы, если все её рёбра имеют одинаковые длины.
- 97** Конус рассечён плоскостью, проходящей через его вершину. Найдите отношение объёмов получившихся частей конуса, если известно, что хорда, которая получается при пересечении секущей плоскости и круга основания, равна его радиусу.
- 98** Найдите объём усечённого конуса, описанного около шара радиуса R , если образующая конуса равна a .
- 99** Около шара радиуса R описан конус с углом α при вершине осевого сечения. Плоскость окружности касания шара и конуса рассекает конус на две части. Найдите объём усечённого конуса.
- 100** Вычислите объём и площадь боковой поверхности конуса, зная радиус R шара, вписанного в конус, и угол α , под которым из центра шара видна образующая конуса.
- 101** Шар радиуса R вписан в конус, шар радиуса r касается первого шара и всех образующих конуса. Найдите объём конуса.
- 102** В шар радиуса R вписан конус, площадь боковой поверхности которого в k раз больше площади его основания. Найдите объём конуса.

- 103** В данную сферу впишите конус, у которого наибольшее значение имеет:
а) объём; б) площадь боковой поверхности; в) площадь полной поверхности и вычислите эти экстремальные величины, если радиус сферы R .
- 104** В конус с радиусом основания R и высотой H вписан цилиндр (окружность одного основания цилиндра лежит на боковой поверхности конуса, а второго – на основании конуса).
а) Чему равна высота цилиндра h , если радиус его основания равен r .
б) Во сколько раз объём конуса больше объёма вписанного в него цилиндра при $H = R$, если осевое сечение цилиндра – квадрат?
- 105** Определите, какую часть объёма конуса составляет объём вписанного цилиндра, если радиус основания цилиндра в два раза меньше радиуса основания конуса.
- 106** Дан конус с радиусом основания R и высотой H . В него вписан цилиндр (окружность одного основания цилиндра лежит на боковой поверхности конуса, а второго – на основании конуса). Какую наибольшую часть объёма конуса может составлять объём вписанного в него цилиндра?
- 107** Поперечное сечение, делящее конус на равновеликие части, проходит через центр описанного шара. Найдите угол между образующей и плоскостью основания.
- 108** В шар единичного радиуса вписан конус, площадь боковой поверхности которого в два раза больше площади его основания. Найдите объём конуса.

Н

- 109** Как изменится объём шара, если его радиус: а) увеличить в 10 раз; б) увеличить на 300% ; в) уменьшить в 5 раз; г) уменьшить на 50% ?
- 110** а) Конус вписан в шар объёмом V ; наибольший угол между образующими конуса α . Найдите объём конуса.
б) Основание пирамиды – прямоугольник, сторона которого равна a и образует с диагональю основания угол α . Каждое ребро пирамиды составляет с её основанием угол 60° . Найдите объём описанного шара.
- 111** Докажите, что если около шара описан конус, то их объёмы пропорциональны площадям их полных поверхностей.
- 112** Вычислите объём и площадь полной поверхности полушара радиусом r , если: а) $r = 12$ м; б) $r = 7$ м.
- 113** Резервуар, наибольшая глубина которого равна 4 м, имеет форму полушара. Определите вместимость этого резервуара.

114 Найдите объём детали, которая имеет форму полушара с приставленным в центральной части большого круга цилиндром (на рис. 7.18 изображено осевое сечение этой детали).

115 На прямой взяты последовательно точки A, B, C, D так, что $AB = BC = CD$, и на отрезках AB, AC и AD , как на диаметрах, построены полуокружности. Эти полуокружности вращаются около прямой AB . Докажите, что больший полученный шар делится полученными сферами на части, объёмы которых относятся как $1 : 7 : 19$.

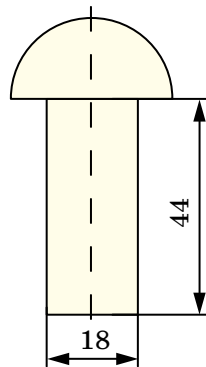


Рис. 7.18

116 Сумма высоты и радиуса конуса равна m . При каком условии объём вписанного в конус шара будет наибольшим? Чему он равен?

117 а) Свинцовый шар, диаметр которого 20 см, переливают в шарики диаметром в 10 раз меньшим. Сколько таких шариков получится? Какое данное в задаче лишнее?

б) Чтобы отлить свинцовый шар диаметром 3 см, используют свинцовые шарики диаметром 5 мм. Сколько таких шариков нужно взять?

118 а) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a , двугранный угол при основании α . Найдите объём вписанного шара.

б) В конус, образующая которого составляет с основанием угол α , вписан шар объёмом V . Найдите объём конуса.

119 Дан куб с ребром a . Найдите объём шара: а) вписанного в куб; б) описанного около куба.

120 Сколько шариков диаметром 0,6 см можно отлить из куска свинца массой 1 кг? Плотность свинца $11,4 \text{ кг/дм}^3$.

121 Диаметр одного арбуза вдвое больше диаметра другого. Во сколько раз первый арбуз тяжелее второго?

122 В цилиндрическую мензурку диаметром 2,5 см, наполненную водой до некоторого уровня, опущены четыре металлических шарика диаметром 1 см. Определите, как изменится уровень воды в мензурке.

123 Будет ли плавать в воде полый медный шар диаметром 10 см и толщиной стенки: а) 2 мм; б) 1,5 мм? Какие данные для решения задачи вам придётся отыскать самостоятельно?

124 Шар радиусом 3 см имеет в середине полость радиусом 2 см. Найдите объём шарового слоя.

125 Докажите, что объём шара диаметром d равен $\frac{1}{6}\pi d^3$.

- 126** Пересыпая песок из полого полушара радиусом r в конус, радиус и высота которого равны r , ученик пришёл к выводу, что объём полушара в 2 раза больше объёма конуса. Соответствует ли результат этого эксперимента теории?
- 127** Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра шара на расстоянии 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите объём шара.
- 128** Найдите объём шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду $PABC$, сторона основания которой a , а двугранный угол при ребре основания α .
- 129** Докажите, что объёмы двух шаров относятся как кубы их радиусов (диаметров).
- 130** а) Во сколько раз объём Земли больше объёма Луны? (Диаметр Земли примите за 13 тыс. км, диаметр Луны 3,5 тыс. км.)
б) Во сколько раз нужно увеличить диаметр шара, чтобы его объём увеличился в два раза?
- 131** Объём шара можно вычислять по приближённой формуле $V = \frac{1}{2}d^3$. С недостатком или избытком получится результат? Найдите относительную погрешность вычисления по этой формуле.
- 132** Масса железного шара равна 4 кг. Вычислите его диаметр.
- 133** Вычислите массу пробкового шара диаметром 2 м. (Плотность пробки 0,25 г/см³.)
- 134** Какой должна быть общая масса спускаемого космического аппарата формы шара радиусом 1 м, чтобы он не тонул в воде?
- 135** Из капельки мыльного раствора диаметром 6 мм мальчик выдул пузырь диаметром 30 см. Найдите толщину пленки пузыря.
- 136** Все вершины куба принадлежат сфере. Найдите объём шара, ограниченного этой сферой, если ребро куба имеет длину a .
- 137** Найдите объём шара, вписанного в конус, образующая которого равна l и наклонена к плоскости основания под углом α .
- 138** Докажите теорему Архимеда: объём шара в 1,5 раза меньше объёма описанного около него цилиндра.
- 139** Из цилиндра, в котором высота равна диаметру, выточен шар наибольшего объёма. Сколько процентов материала сточено?
- 140** Из цилиндра, осевое сечение которого – квадрат со стороной 10 см, кузнец выковал шар. Найдите радиус этого шара.

- 141** Из свинцового шара радиусом 10 мм делают цилиндрический диск толщиной 3 мм. Каков диаметр диска?

П

- 142** В шар вписан конус высотой H . Объём конуса равен $\frac{1}{4}$ объёма шара. Найдите объём шара.
- 143** В конус, высота которого равна радиусу основания, вписан шар. Найдите отношение объёма шара к объёму конуса.
- 144** В конус вписан шар. Плоскость, параллельная основанию конуса, касается шара и делит конус на две части, имеющие равные объёмы. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания.
- 145** В конус с углом φ между образующей и плоскостью основания вписан шар. Найдите отношение объёма конуса к объёму шара.
- 146** Сфера с центром в вершине конуса касается его основания и делит поверхность конуса на две части, имеющие равные площади. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.
- 147** В правильную четырёхугольную пирамиду вписан шар. Затем в верхнюю часть пирамиды вписан второй шар, касающийся поверхности первого шара и пирамиды, затем третий, касающийся поверхности второго шара и пирамиды, и т. д. Найдите сумму объёмов всех шаров, если сторона основания пирамиды равна a , а боковые ребра наклонены к её основанию под углом α .
- 148** Куб, равносторонний цилиндр, равносторонний конус и шар имеют равные площади полных поверхностей. Объём какой из фигур наибольший, а какой – наименьший?
- 149** Сколько кубометров земли потребуется для устройства клумбы, имеющей форму шарового сегмента с радиусом основания 5 м и высотой 60 см?
- 150** Цистерна имеет форму цилиндра, к основаниям которого присоединены равные шаровые сегменты. Диаметр цилиндра равен 3 м, высота сегмента 0,57 м. Какую длину должна иметь образующая цилиндра, чтобы вместимость цистерны равнялась 50 м³?
- 151** а) Радиус шарового сектора равен R , а хорда осевого сечения m . Найдите объём шарового сектора.
б) Радиус шарового сектора равен R , угол в осевом сечении α . Найдите объём шарового сектора.

- 152** Площадь осевого сечения шарового сектора в три раза меньше площади большого круга. Во сколько раз объём шарового сектора меньше объёма шара?
- 153** Основание пирамиды – ромб со стороной a и острым углом α ; двугранные углы при основании равны φ . Найдите объём шара, вписанного в эту пирамиду.
- 154** а) Объём конуса в m раз больше объёма вписанного в него шара. Найдите угол между образующей и плоскостью основания конуса.
б) Найдите наименьшее значение m .
- 155** Угол при вершине осевого сечения конуса равен α , радиус основания r . Найдите радиус сферы с центром в вершине конуса, которая делит объём конуса пополам.
- 156** В конус вписан шар радиусом r . Найдите объём конуса, если известно, что плоскость, касательная к шару и перпендикулярная одной из его образующих, отстоит от вершины конуса на расстоянии a .
- 157** Шар радиусом r с центром на оси цилиндрической поверхности вращения касается её. Грани двугранного угла α с ребром вне цилиндрической поверхности и перпендикулярным оси касаются шара. Найдите объём тела, заключенного между цилиндрической поверхностью и гранями двугранного угла, если одна из граней составляет с осью угол β .
- 158** Шар касается боковой поверхности конуса. При каком значении радиуса шара часть его поверхности, находящаяся внутри конуса, будет иметь наибольшую площадь, если высота конуса h , а угол при вершине осевого сечения 2α .
- 159** На основании AB равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность по одну сторону с треугольником. К ней проведена касательная $OE \parallel AB$, пересекающая AC в точке D , CB – в E . Докажите, что ломаная $ADEB$ и полуокружность, вращаясь вокруг AB , описывают: а) равновеликие поверхности, если треугольник ABC правильный; б) поверхности равновеликих тел, если $CO = AB$.
- 160** Множество всех концентрических окружностей пересечено прямой, проходящей через общий центр окружностей, и в каждой окружности проведены параллельно этой прямой равные хорды. Докажите, что объёмы тел, образованных вращением полученных круговых сегментов вокруг этой прямой, равны между собой.
- 161** В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α ; в неё вписан шар объёмом V . Найдите объём пирамиды.

- 162** Отношение объёма прямого параллелепипеда к объёму вписанного в него шара равно k . Найдите углы в основании параллелепипеда и допустимые значения k .
- 163** Радиус сферического сектора R ; наибольший угол между радиусами α . Найдите объём и площадь поверхности шара, вписанного в сектор.
- 164** В шар вписан конус, угол наклона образующей которого к плоскости основания равен α . Найдите отношение объёмов частей шара, лежащих вне конуса.
- 165** Найдите отношение объёма конуса к объёму вписанного в него шара, если известно, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная одной из образующих конуса отсекает от этой образующей отрезок с концом в вершине, длина которого в k раз больше радиуса шара.
- 166** Объём конуса в n раз больше объёма вписанного в него шара. Найдите угол наклона образующей к плоскости основания конуса.
- 167** Отношение высоты конуса к радиусу описанного около него шара равно k . Найдите отношение объёмов этих тел. При каких значениях k задача имеет решение?
- 168** а) В шар вписан конус. Объём части шара, заключённой между сферической и конической поверхностями, объём конуса и объём части шара, заключённой между основанием конуса и сферической поверхностью, образуют геометрическую прогрессию. Найдите угол наклона образующей конуса к плоскости его основания.
б) Определите угол между высотой и образующей конуса, если известно, что объём конуса в $1\frac{1}{3}$ раза больше объёма полушара, вписанного в конус так, что большой круг полушара лежит на основании конуса.
- 169** В конус вписан шар, причём отношение их объёмов равно k . Найдите отношение объёмов шаровых сегментов, отсекаемых от шара плоскостью, проходящей через линию касания шара с конусом.
- 170** Определите угол раствора конуса, если объём вписанного в него шара равен объёму, содержащемуся между сферической и конической поверхностями.
- 171** Внутри цилиндра расположены четыре одинаковых шара так, что каждый из них касается трёх других и боковой поверхности цилиндра. Два шара касаются нижнего основания, а два других – верхнего основания цилиндра. Найдите объём цилиндра, если объём шара равен V .

- 172** В шаре радиусом R просверлено цилиндрическое отверстие: ось цилиндра проходит через центр шара, а диаметр основания цилиндра равен радиусу шара. Вычислите объём оставшейся части шара.
- 173** Два шара вписаны в круговую цилиндрическую поверхность и касаются друг друга. Третий шар проходит через две окружности, по которым касаются цилиндрической поверхности первые два шара. Докажите, что объём части третьего шара, расположенной вне цилиндрической поверхности, равен удвоенному объёму фигуры, находящейся между первыми двумя шарами внутри цилиндрической поверхности.
- 174** В шар вписан цилиндр, высота которого составляет половину диаметра шара. Найдите отношение объёмов фигур, на которые поверхность цилиндра делит шар.

К ГЛАВЕ 1

1. а) Образующими цилиндра являются отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 .
 б) Высотой цилиндра является, например, отрезок AA_1 .
 в) Ось цилиндра – отрезок OO_1 .
 г) На рисунке 1.36 равными являются отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 . Равны также отрезки OA, OB, OC и OD .
2. Прямой круговой цилиндр.
3. Цилиндр получится при вращении прямоугольника OCC_1O_1 вокруг прямой OO_1 .
4. Плоскость.
5. а) При пересечении цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра, получится в сечении прямоугольник;
 б) при пересечении цилиндра плоскостью, параллельной основаниям цилиндра, в сечении получится круг;
 в) при пересечении цилиндра плоскостью, не параллельной ни оси, ни основаниям цилиндра, и не пересекающей основание цилиндра, в сечении получится эллипс.
6. Форму прямоугольника.
7. Форму параллелограмма.
8. Или лежать в параллельных плоскостях, или быть симметричными относительно некоторой плоскости.
10. Нет, только вращением прямоугольника.
12. а) одна плоскость; б) бесконечно много плоскостей.
13. а) Да; б) бесконечное множество плоскостей и осей симметрии.
15. а) 30° ; б) нам дан прямой круговой цилиндр.
16. 10 м.
17. а) $2\sqrt{7}$ см; б) $12\sqrt{7}$ см².
19. $\frac{2}{\sqrt{3}}$
20. rh .
22. $8\sqrt{1 - \frac{\pi}{12}}$.
23. $\sqrt{R^2 - \left(\frac{S}{2H}\right)^2}$.
29. Рассмотрите эту задачу для точки окружности, описанной около треугольника ABC , и примените теорему о трех перпендикулярах.

42. $S_{\text{основния}} = \frac{d^2 \sin^2 \alpha}{4\pi}$; $S_{\text{осевого сечения}} = \frac{d^2 \sin 2\alpha}{2\pi}$
43. $140 \text{ см} \times (10\pi + 2) \text{ см}$.
44. $S_{\text{осевого сечения}} = \frac{2Qn}{\pi(m + 2n)}$.
45. $S_{\text{осевого сечения}} = \frac{Stg\alpha}{\pi\left(\text{tg}\alpha + \frac{1}{2}\right)}$.
46. $4Q \text{ctg} \frac{\varphi}{2}$ или $4Q \text{tg} \frac{\varphi}{2}$.
47. $\alpha = \text{arctg} \frac{h}{\pi D} \approx 1^\circ 30'$, $l = n\sqrt{h^2 + (\pi D)^2} \approx 75,5n \text{ мм}$.
48. а) $R = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ и $h = \frac{a\sqrt{2}}{2} R$; б) угол между данной диагональю и плоскостью основания равен $\frac{1}{2} \text{arctg} 2 \approx 31^\circ 43'$. Тогда $R \approx 0,526a$, $H \approx 0,425a$.
49. $11000\pi \text{ м}^2$.
50. а) $S_{\text{полн. пов.}} = \frac{d^2}{2} \left(\sin 2\alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\pi} \right)$; б) $\alpha = \frac{1}{2} \text{arctg} 2\pi$.
51. $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{\pi^2 + 2} - \pi}{2}$, если $\frac{S_{nn.a}}{S_{nn.b}} = \frac{2}{1}$; $\frac{a}{b} = \pi + \sqrt{\pi^2 + 2}$, если $\frac{S_{nn.b}}{S_{nn.a}} = \frac{2}{1}$.
52. $r = \sqrt{\frac{10}{\pi}} \text{ см}$, $h = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{10}{\pi}} \text{ см}$.
54. $2\pi r^2 \text{tg}\alpha$.
58. πQ .
59. $\frac{\pi a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \left(2H + \frac{a}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)$.
60. $\approx 1,4 \cdot 10^7 \text{ Н}$.
62. Тогда и только тогда, когда вокруг 4-угольника, лежащего в основании, можно описать окружность.
63. Они перпендикулярны.

64. 180° .
65. Суммы противоположных сторон основания призмы равны, согласно свойству противоположных сторон описанного четырёхугольника. Отсюда следует, что и суммы площадей противоположных граней равны, т.к. все грани имеют одну и ту же высоту.
66. $S_{\text{п.п.}} = 2R^2 + 2R\sqrt{R^2 + 2H^2}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 + \sqrt{3}RH + \frac{\sqrt{3}}{4}R\sqrt{4H^2 + 9R^2}$.
67. $\frac{\sqrt{2}}{2}R$.
68. а) $\frac{R}{r} = 3 + 2\sqrt{2}$.
69. $(\sqrt{2} - 1) : 2 : (\sqrt{2} - 1)$.
70. $S_{\text{п.п.}} = \frac{2S(nm + m^2)}{4m^2 + n^2}$.
71. 3,75 см.
72. $99\frac{29}{54}\%$
73. $S_{\text{сф}} = \frac{4}{3}Q$.
74. $\arccos(4\sqrt{2} - 5)$.
75. $2\frac{13}{36}r$.
76. $\frac{a}{4}(3\sqrt{2} + 4)$.

К ГЛАВЕ 2

- Вершина конуса – точка O ; образующие – OA, OD, OB , ось конуса – прямая OO_1 .
- а) Не может; б) не может.
- Может.
- Может.
- Может.
- Не может.
- а) Чтобы в сечении конуса получился круг, нужно пересечь конус плоскостью, параллельной основанию.
- а) Равнобедренным треугольником; б) Кругом; в) Равнобедренным треугольником; отрезком или точкой.

13. 12 дм.
14. $16\sqrt{3}$ см².
15. r^2 .
16. $\frac{2}{\pi}$.
26. а) $\pi l^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ б) $\sqrt{\frac{Q}{\pi} \left(l^2 - \frac{Q}{\pi} \right)}$
27. $\frac{R^2 \operatorname{tg} \alpha}{\sin \varphi} \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \varphi}$
28. б) 45° .
38. Рассмотрите осевое сечение конуса, содержащее данную точку.
40. 60° .
42. $\arccos \frac{29}{32} \approx 25^\circ$.
43. $\frac{l^2 \sin \beta \sqrt{\cos(\varphi + \beta) \cos(\varphi - \beta)}}{\cos^2 \varphi}$
44. $l \leq R\sqrt{2}$. Угол между образующими изменяется в промежутке $[0^\circ; \varphi]$, где φ — угол осевого сечения. Если $\varphi \geq 90^\circ$, то конус имеет перпендикулярные образующие.
45. $\arcsin \frac{h\sqrt{2}}{\sqrt{h^2 + R^2}}$ при $h \leq R$.
46. а) ≈ 245 мм; б) $\approx 0,21$; в) $k = 2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.
50. а) увеличится в n раз; б) не изменится; в) увеличится в n^2 раз.
51. а) $\frac{3}{2}$; б) 1.
52. а) $\frac{5}{2}$; б) $\frac{10}{3}$; в) 5.
54. $S_{\text{бок}} = 64\pi$; $S_{\text{полн}} = 80\pi$.
55. $\pi l^2 \cos \alpha$.
56. $1,2\pi$ кг.

$$57. \quad 4\pi\sqrt{2}(8+4\sqrt{2}).$$

$$58. \quad \pi a^2(3+2\sqrt{3}).$$

$$59. \quad \pi a^2(2\sqrt{3}+3).$$

$$60. \quad R = \frac{9}{2}; h = \frac{3}{2}\sqrt{55}.$$

$$62. \quad \text{a) } \sqrt{2} - 1 \approx 0,414; \text{ б) } \approx 7,8c^2.$$

$$63. \quad S_{\text{бок}} = \frac{Q}{\cos\varphi}; S_{\text{полн}} = \frac{Q}{\cos\varphi} + Q.$$

$$64. \quad S_{\text{бок}} = \frac{\sqrt{2}}{2}H.$$

$$65. \quad \approx 4,7 \text{ дм}^2.$$

$$67. \quad \pi(R+r)l.$$

$$68. \quad \text{В 6 раз.}$$

$$69. \quad S_{\text{бок}} = 30\pi \text{ см}^2, S_{\text{п.к.}} = 39\pi \text{ см}^2.$$

$$70. \quad 39 \text{ листов.}$$

$$71. \quad 1) \frac{1}{2} \pi a^2(3 + \sqrt{3}); 2) \frac{\pi b^2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

$$74. \quad 630\pi \text{ см}^2 \approx 1980 \text{ см}^2.$$

$$76. \quad 2\pi a^2(2 + \cos \alpha)(2\cos \alpha + 1).$$

$$77. \quad \sqrt{Q^2 + \pi^2 S^2}.$$

$$78. \quad \sqrt{\pi^2 + 4\pi} - \pi.$$

$$79. \quad \text{a) } 2\arcsin \frac{Q-q}{q}; \text{ б) } 2\pi \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$80. \quad \frac{S^2 - \pi^2 Q^2}{2S}.$$

$$81. \quad \sqrt{\frac{Q\left(1 - \sin \frac{\varphi}{2}\right)}{\pi \sin \frac{\varphi}{2}}}.$$

82. $\frac{Q \sin \varphi}{2\pi \sin \frac{\beta}{2}}, \varphi < \beta.$
83. $2 \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4}.$
84. По условию задачи $\pi R l = 2\pi R^2$, откуда длина образующей $l = 2R$. Угол развёртки α находится из соотношения $\alpha l = 2\pi R \Rightarrow \alpha = \pi$.
85. $\frac{2R\sqrt{l^2 - R^2}}{\sqrt{2(l^2 - R^2)} + 2R}.$
86. $\frac{l \sin 2\alpha}{2 \cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha}.$
89. $\frac{2q}{\pi} \left(1 + \sqrt{1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} \right).$
90. $V = \frac{\pi b^2}{81 \cos \alpha \sin^2 \alpha}; S_{\Pi} = \frac{\pi b^2 (1 + \cos \alpha)}{9 \cos \alpha \sin^2 \alpha}.$
91. $2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}.$
92. $\frac{HR - hR}{H}.$
93. $\frac{hR}{R - r}.$
95. а) Основаниями усечённого конуса являются два круга;
 б) да, плоскости, в которых лежат основания усечённого конуса;
 в) прямая CB перпендикулярна плоскостям оснований;
 г) ось конуса — прямая CB ;
 д) осевое сечение конуса — равнобедренная трапеция.
96. $\approx 1835 \text{ см}^2; \approx 2149 \text{ см}^2.$
97. $2\pi(R^2 - r^2).$
99. 1) $3\frac{1}{3} \text{ см}, 8\frac{1}{3} \text{ см}, 216^\circ.$
100. $S + \sin \alpha \sqrt{S^2 + (R^2 - r^2)^2 \cos^2 \alpha} + \cos \alpha \sqrt{S^2 + (R^2 - r^2)^2 \sin^2 \alpha}.$

$$102. \text{ а) } 120\pi \approx 377 \text{ см}^2, 224\pi \approx 704 \text{ см}^2; \text{ б) } \pi h^2 (2,5 + 2\sqrt{2}).$$

$$103. 188\pi \text{ см}^2.$$

$$104. \frac{lR}{R-r}, \frac{R\sqrt{l^2 - (R-r)^2}}{R-r}.$$

$$105. \text{ а) } l(d + l \cos \varphi) \sin \varphi; \text{ б) } \frac{\pi h^2}{4}, \frac{9\pi h^2}{4}.$$

$$106. \pi \left(\frac{R+2r}{3} \right)^2 \text{ и } \pi \left(\frac{2R+r}{3} \right)^2.$$

$$107. \frac{Q \sin \alpha}{\sin \beta}.$$

$$108. \frac{Q \sin \varphi \sin \beta}{\cos^2 \left(\beta - \frac{\varphi}{2} \right)} \text{ или } \frac{2Q \sin \varphi \sin \beta}{\sin^2 \left(\beta + \frac{\varphi}{2} \right)}$$

$$109. \approx 26 \text{ см}.$$

$$110. \frac{5\pi}{\sin \varphi}.$$

$$111. 10\sqrt{2(5\sqrt{173} + 8)} \approx 12 \text{ см}.$$

$$114. \frac{\pi(a^2 - b^2)}{4 \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$117. 153,86.$$

$$118. 64\pi.$$

$$119. 400\pi.$$

$$120. 81\pi \approx 255.$$

$$122. 100 \text{ л}.$$

$$123. 120\pi.$$

$$127. 1:3.$$

$$128. 1:3.$$

$$129. 50\pi.$$

$$133. \frac{6}{\pi}.$$

$$134. 75\pi.$$

$$136. \frac{\pi b^2}{\sin^2 \alpha}.$$

$$137. \frac{\pi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{3}.$$

$$138. \frac{\pi a^2 \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - 1 \right)}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 1}.$$

$$145. \frac{4Q \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{1 - \cos \alpha}.$$

$$147. \arcsin \frac{n-m}{n+m}.$$

$$149. \frac{2}{3}.$$

$$150. \frac{4Q}{3}.$$

$$157. \operatorname{arctg} \frac{4}{3}.$$

$$158. \frac{4Rr}{(R+r)^2}.$$

$$160. \text{ а) } \frac{l}{2 \sin \alpha}; \text{ б) } l \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$161. h \sqrt{h(2R-h)}.$$

$$167. \pi.$$

$$168. 60^\circ.$$

$$171. \frac{2\pi r^2}{\sin \alpha}.$$

К ГЛАВЕ 3

1. а) Да; б) образами точек V и H являются точки A и D , образами точек G и T являются точки O и B ; в) точки K, L, E переходят в себя; д) отрезок KL переходит в ломаную KBL , а отрезок KE – в ломаную $KADE$; е) да.

2. а) Да. б) Образом точки A является точка A_1 . Образом точки X является точка X_1 . Образом точки L является точка L_1 . в) В точку M_1 переходит точка M . д) Да.
3. а) Да. б) Точка C переходит в точку D_1 , точка D переходит в точку D_1 , точка A переходит в точку A_1 . в) Точка H_1 является образом всех точек отрезка KF . г) Нет.
4. б) OY_1 ; в) OA ; г) да.
5. Да. Обратимо.
6. Да. Обратимо.
7. Нет, т.к., например, точке T соответствуют две точки окружности C и M .
8. Нет.
9. Да. Обратимо.
10. Одной точке диаметрального сечения соответствуют две точки на сфере L , а, значит, заданное соответствие не является отображением.
12. Нет. Да.
13. г) Да.
14. е) Нет.
15. а) Прямая p . б) Да.
16. Да. Да.
17. Да. Да.
18. Нет.
19. Да. Да.
20. Нет.
22. Да. Те, которые проходят через центр симметрии.
24. а) Один – его середину. б) Бесконечное множество – любая её точка. в) Бесконечное множество – любая её точка.
26. а) Да. б) Да.
28. Да, когда его основание – ромб.
32. а) Лежащие на оси симметрии. б) Ось симметрии и прямые, перпендикулярные оси симметрии.
34. Указание. Докажите, что образом прямой при осевой симметрии является прямая. Образом плоскости является плоскость.
38. Указание. Отложим на последовательных рёбрах четырёхгранного угла от его вершины равные отрезки $OA = OB = OC = OD$. Тогда $AB = CD$, $BC = AD$. Если точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, то $ABCD$ – параллелограмм. Убедитесь, что осью симметрии четырёхгранного угла будет прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ и точку O . Если точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, то убедитесь, что прямая, проходящая через середины отрезков AC и BD , проходит также через точку O и является осью симметрии четырёхгранного угла.
57. Указание. Каждую из двух симметрий представьте как композицию двух плоскостных симметрий с перпендикулярными плоскостями симметрии.

Общую плоскость данных осей выберите в качестве одной из плоскостей симметрии.

58. Указание. Представьте каждое вращение вокруг оси в виде композиции двух плоскостных симметрий, причем в обеих композициях в качестве одной из плоскостей симметрии выберите ту, которая проходит через данные оси поворота.
62. Ось проходит через точку пересечения данных осей и лежит в их плоскости. Если a, b, c – данные оси, а d – полученная ось, то $\angle(a, b) = \angle(d, c)$.
63. Ответ: осевая симметрия.
Если a, b, c – данные три оси, то получаем: $S_c \circ S_b \circ S_a = S_d$, где $d \parallel a$, причём средняя линия для a и c совпадает со средней линией для b и d .
64. Если l и p – оси, $l \perp p$, $\angle(l, p) = \alpha$, то $S_l = S_\alpha \circ S_\beta$, $R_p^\Phi = S_\gamma \circ S_\alpha$, где $\beta \perp \alpha$, $\beta \perp p$.
Поэтому $\beta \perp \gamma$. Следовательно, $R_p^\Phi \circ S_l = S_\gamma \circ S_\alpha \circ S_\alpha \circ S_\beta = S_\gamma \circ S_\beta = S_q$, где $q = \beta \cap \gamma$.
65. Пусть $\beta \cap \gamma = a$, $\gamma \cap \alpha = b$, $\alpha \cap \beta = c$. Построим ортогональные проекции a_1 и c_1 прямых a и c соответственно на плоскостях α и γ . Плоскость δ , проходящая через прямые a_1 и c_1 , искомая.

К ГЛАВЕ 4

1. а) 6; б) 8; в) 12; г) 26.
3. а) $\overline{AB} = \overline{DC} = \overline{D_1C_1} = \overline{A_1B_1}$; б) $\overline{CC_1} = \overline{DD_1} = \overline{AB_1} = \overline{BB_1}$; в) $\overline{AD_1} = \overline{BC_1}$; г) $\overline{OD_1} = \overline{BO}$; д) $\overline{OB} = \overline{D_1O}$.
4. Нет.
5. а) $\overline{BC} = \overline{FE}$, $\overline{CB} = \overline{EF}$, $\overline{AB} = \overline{ED}$, $\overline{DE} = \overline{BA}$ и т.д.; б) $\overline{AB}$ и $\overline{FC}$; $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$; и т.д.
6. а) Нет; б) да.
7. а) $\overline{BM}$ и $\overline{BC}$; $\overline{AM}$ и $\overline{DM}$ б) $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$; $\overline{AB}$ и $\overline{AM}$; в) $\overline{AD}$ и $\overline{CB}$; $\overline{MC}$ и $\overline{DC}$. Равных векторов нет.
11. а) Параллельным переносом; б) центральной симметрией.
12. а) Да; б) нет.
17. а) $|\overline{CC_1}| = 9$ см; $|\overline{CB}| = 12$ см; $|\overline{CD}| = 9$ см.
- б) $|\overline{DC_1}| = \sqrt{8^2 + 9^2}$ см; $|\overline{DB}| = \sqrt{9^2 + 12^2}$ см; $|\overline{DB_1}| = \sqrt{8^2 + |\overline{B_1D_1}|}$ см.
18. а) $\overline{MK}$ и $\overline{BD}$, $\overline{NM}$ и $\overline{BA}$, $\overline{MK}$ и $\overline{AD}$; б) $\overline{MK}$ и $\overline{BD}$; в) $\overline{KM}$ и $\overline{AD}$.
19. а) $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$, $\overline{DC}$ и $\overline{D_1C_1}$, $\overline{C_1D}$ и $\overline{B_1A_1}$, $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{AB}$, и т.д.; б) $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$, $\overline{DC}$ и $\overline{D_1C_1}$, $\overline{D_1C_1}$ и $\overline{A_1B_1}$, и т.д.; в) $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ и $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_1D_1}$ и $\overline{DA}$ и т.д.

20. а) Да; б) да; в) нет.
21. а) Да; б) нет; в) да; г) нет; д) нет; е) да.
23. Указание, Для решения задачи надо увидеть, что $\overline{PN} = \overline{QM}$ и $\overline{MN} = \overline{QP}$ (следует использовать свойство средней линии треугольника).
25. а) $a+b$; б) $a-b$; в) $a-b$.
28. $\vec{0}$.
29. а) $\overline{AC}$; б) $\overline{AB}$; в) $\vec{0}$.
30. 1) $\overline{AC_1}$; 2) $\overline{CD_1}$; 3) $\overline{BC_1}$; 4) $\overline{D_1B}$.
34. Указание. Воспользуйтесь равенством $\overline{AB} = \overline{DC}$ и формулой вычитания векторов.
35. Воспользуйтесь равенством $\overline{AD} + \overline{DB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \vec{0}$.
40. а) -1 ; б) 2 ; в) $-0,5$; г) x не существует.
41. а) $\frac{1}{|a|}$; б) $-\frac{5}{|a|}$; в) $-\frac{b}{|a|}$; г) 0 .
42. а) $0,5$; б) -1 ; в) 2 ; г) -3 ; д) $-\frac{1}{3}$; е) $-\frac{2}{3}$.
43. $(\vec{a} + \vec{b}) \uparrow \vec{a}$. Если $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, то $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Если $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, то $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$.
45. а) $1 \cdot \vec{p} + 0 \cdot \vec{q} + 1 \cdot \vec{r}$; б) $1 \cdot \vec{p} + 1 \cdot \vec{q} + 1 \cdot \vec{r}$; в) $0 \cdot \vec{p} + 1 \cdot \vec{q} + 0,5 \cdot \vec{r}$; г) $1 \cdot \vec{p} + 1 \cdot \vec{q} + 0,5 \cdot \vec{r}$; е) $\frac{5}{11} \cdot \vec{p} + 1 \cdot \vec{q} + 1 \cdot \vec{r}$.
46. $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\vec{r} + \vec{q} + \frac{b}{a}\vec{p}) = \frac{1}{2}\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{q} + \frac{b}{2a}\vec{p}$.
47. $\overline{OA} = -\overline{OB} - \overline{OC} + 3\overline{OM}$.
48. а) $0,5\vec{a} + 0\vec{b} + 0,5\vec{c}$; б) $1\vec{a} + (-1)\vec{b} + 1\vec{c}$.
49. $\overline{DM} = \frac{7}{10}\overline{DA} + \frac{3}{20}\overline{DB} + \frac{3}{20}\overline{DC}$. Указание. Воспользуйтесь равенством $\overline{AM} = \frac{3}{7}\overline{MA_1}$, которое вытекает из условия задачи.
51. $\vec{0}$.

$$54. d = \frac{3abc}{ab+bc+ca}.$$

$$62. AM:AS = \frac{2k}{1+2k-l-m}.$$

70. Результатом операций над векторами является вектор, а скалярное произведение двух векторов есть число.

71. Надо знать длины этих векторов и угол между этими векторами.

72. Векторы взаимно перпендикулярны.

73. Нет.

$$74. \bar{a} \cdot \bar{b} = 0.$$

76. Для коллинеарных.

77. Только для коллинеарных векторов.

78. 1а) Знак «+»; 1б) знак «-».

$$79. 1) \bar{a} \cdot (-\bar{a}) = -\bar{a}^2; 2) \bar{b} \cdot k\bar{b} = k\bar{b} \cdot \bar{b} = k\bar{b}^2.$$

$$81. а) 3\sqrt{2}; б) -10; в) 0.$$

$$82. а) \bar{b}^2; б) 4\bar{a}^2 - 13\bar{b}^2$$

$$83. а) \bar{a}^2; б) 2\bar{a}^2.$$

$$86. 4.$$

$$88. а) 0; б) -\frac{1}{2}; в) -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$89. а) a^2; б) -2a^2; в) \frac{1}{2}a^2; г) -\frac{1}{2}a^2; д) -a^2; е) a^2; ж) \frac{3}{2}a^2.$$

$$90. c^2.$$

$$91. а) \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2).$$

$$107. а) \frac{5\sqrt{7}}{14}; б) 0; в) -\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

$$153. а) 90^\circ \text{ и } 90^\circ; б) 135^\circ \text{ и } 45^\circ.$$

$$159. б) \sqrt{3}.$$

$$160. а) \text{Да}; б) \text{нет}; в) \text{да}; г) \text{да}; д) \text{нет}.$$

$$161. а) \frac{2}{3}a\sqrt{7}; б) 2a; в) a; г) \frac{2}{3}a\sqrt{7}.$$

$$171. \text{ а) } \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi} ; \text{ б) } \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi} .$$

$$172. \cos \beta = 2 \cos \alpha - 1.$$

$$173. 2 \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$178. \cos \varphi = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{2 \cos \frac{\gamma}{2}}.$$

$$191. CN : ND = 3 : 4; AM : MB = 2 : 5.$$

$$193. OG^2 = R^2 - \frac{1}{16} (a^2 + b^2 + c^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2).$$

К ГЛАВЕ 5

1. а) $P_1(3; 4), P_2(0; 3), P_3(3; -1), P_4(5; 0), P_5(4; -4), P_6(3; -6), P_7(0; -4), P_8(-3; -4), P_9(-5; 0), P_{10}(-6; 3)$. б) На одной прямой лежат точки $P_1, P_3, P_6, P_8, P_7, P_5$. в) В первой четверти P_1, P_2, P_4 . В четвертой четверти P_3, P_5, P_7, P_6 .
2. $(0; 0)$.
5. $(0; 0)$.
6. $(0; 0)$.
14. $b = 2$.
15. $a = 4, 5, b = -1$.
16. $B(3; 14)$.
17. $10; 5; \sqrt{37}$.
21. а) 24; б) 10.
23. 20.
24. а) 24; б) 10.
25. 24.
28. $(0; 5)$ или $(0; -5)$
29. а) $M(0, 1), X(-1, 6), Y(4, 6), Z(5, 1)$; б) $10 + 2\sqrt{26}$.
30. 13 и 17.
31. а) Квадрат; б) параллелограмм (но не ромб и не прямоугольник); в) ромб (но не квадрат); г) прямоугольник (но не квадрат).
37. $(10; 0)$ и $(18; 0)$.
47. Если соответствующие координаты двух точек одновременно чётные или нечётные, то середина отрезка с концами в этих точках имеет целочисленные координаты. Из пяти точек всегда две точки имеют соответствующие координаты одновременно чётные или нечётные.

48. $H\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
49. а) $(1; 1)$; б) $(0; \left(0; \frac{7}{3}\right))$; в) кроме точки, указанной в п. 6), имеется еще одна точка $(-8; 13)$; г) $(1 \pm 4\sqrt{3}; 1 \pm 3\sqrt{3})$; д) $(1; 1)$.
51. Последовательность действий такова:
 1) Опустим перпендикуляр из точки A на плоскость xOy , получим точку A_1 – проекцию точки A .
 2) Из точки A_1 опустим перпендикуляр на оси Ox и Oy , получим точки A_2 и A_3 – координаты точки A .
 3) Из точки A опустим перпендикуляр AA_4 на ось Oz . Точка A_4 – третья координата точки A .
52. а) Начало координат везде обозначается точкой O , а оси координат – Ox , Oy , Oz . В данном случае начало координат точка O совпадает с вершиной параллелепипеда – точкой C_1 .
 б) Оси координат называют – ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат.
 в) Координатные плоскости обозначаются xOy , xOz , zOy .
 г) На координатных осях лежат рёбра C_1C , C_1D_1 , C_1B_1 .
 д) Точка A имеет координаты (C_1D_1, B_1C_1, C_1C) .
56. Точка A принадлежит оси Oy , точка B – оси Ox , точка C – оси Oz .
61. $BC \parallel xOy$
62. Точки симметричны относительно: а) плоскости xOy ; б) плоскости xOz ; в) начала координат O .
65. 1 до плоскости xOy ; 3 до плоскости xOz ; 2 до плоскости yOz .
66. $K_{xOy}(2; 3; 0)$, $K_{xOz}(2; 0; 1)$, $K_{yOz}(0; 3; 1)$.
67. $P_{Ox}(2; 0; 0)$, $P_{Oy}(0; 3; 0)$, $P_{Oz}(0; 0; 1)$.
68. $BK = \sqrt{66}$.
69. Точка A лежит ближе.
70. $3\sqrt{6}$.
71. $y = -4$.
72. Нет.
73. $(2; -2; 5)$.
74. $M(0; -2; 0)$.
75. $M\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; 0\right)$.
76. $(2; 2; 2)$, $(-2; -2; -2)$.
78. $D(2; 2; 0)$.
79. $D\left(\frac{20}{17}; -\frac{19}{17}; \frac{2}{17}\right)$. Воспользуйтесь тем, что $AD = BC$ и $\overline{AB} = k\overline{DC}$, $k > 0$.

$$80. \text{ а) } M\left(\frac{10}{\sqrt{14}}; \frac{15}{\sqrt{14}}; \frac{5}{\sqrt{14}}\right), AB = \sqrt{14}, \overline{AM} : \overline{MB} = 5 : (\sqrt{14} - 5) = \lambda, |AB| = \sqrt{21},$$

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \lambda \overline{OB}}{1 + \lambda}.$$

$$81. \overline{AB}(1; -3; 1); \overline{AC}(2; -6; 2); \overline{AC} = 2\overline{AB} \Rightarrow B \in AC.$$

$$82. \overline{OC} = \frac{\overline{OA} + \lambda \overline{OB}}{1 + \lambda}, \lambda = -2 \Rightarrow C(-4; 3; -5).$$

$$84. \text{ Искомая точка } C(0; 0; z). \text{ По условию задачи } AC = BC, z = \frac{9}{4}.$$

89. а) 1. Вычислим расстояние ρ между прямой AB и осью Oz . Оно равно расстоянию между ортогональными проекциями прямой A_1B_1 и прямой O на плоскость xOy соответственно прямой AB и оси Oz .

2. Прямая A_1B_1 пересекает оси Ox и Oy в точках $A_1(3; 0; 0)$ и $C_1(0; -3; 0)$.

3. Искомое расстояние ρ – длина высоты треугольника OA_1C_1 ; $OA_1 \cdot OC_1 =$

$$= \rho A_1C_1, \rho = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

$$90. \text{ а) } \cos \angle A = -\frac{2}{\sqrt{10}}, \cos \angle B = \frac{11}{5\sqrt{7}}, \cos \angle C = \frac{8}{\sqrt{70}}.$$

$$\text{б) } \cos \angle A = \frac{2}{5\sqrt{6}}, \cos \angle B = \frac{5}{9\sqrt{2}}, \cos \angle C = \frac{23}{15\sqrt{3}}.$$

$$91. M\left(-\frac{163}{298}; \frac{60}{298}; -\frac{361}{298}\right). \text{ Предварительно выведите формулу}$$

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OA} \sin 2\angle A + \overline{OB} \sin 2\angle B + \overline{OC} \sin 2\angle C}{\sin 2\angle A + \sin 2\angle B + \sin 2\angle C}.$$

$$100. 36.$$

$$101. 8\sqrt{2}.$$

$$102. 9.$$

$$114. \text{ а) } (x+1)^2 + (y-2)^2 = 10; \text{ б) } (x-2)^2 + y^2 = 13; \text{ в) } (x-1)^2 + (y+2)^2 = 20.$$

$$116. \text{ а) } \sqrt{26} + \sqrt{5} + 1; \sqrt{26} - \sqrt{5} - 1; \text{ б) } 0,5\sqrt{410} - 0,5\sqrt{2} + 1; 0,5\sqrt{410} - 0,5\sqrt{2} - 1;$$

$$\text{ в) } 0,5(\sqrt{13} + \sqrt{2} + 3); 0; \text{ г) } 0,5(\sqrt{30} + \sqrt{26}); 0,5(\sqrt{30} - \sqrt{26}).$$

$$118. 2ax + 2by = a^2 + b^2.$$

$$119. \text{ а) } (305, 215); \text{ б) } \text{ прямые параллельны; в) } (0, 0).$$

120. 6.

121. 90° .

122. В двух.

129. $y = 2x - 7$.

135. $k_1 k_2 = -1$.

136. $(a_1 - b_1)(c_1 - d_1) = -(a_2 - b_2)(c_2 - d_2)$.

137. $\frac{|kx_0 - y_0 + b|}{\sqrt{k^2 + 1}}$.

139. 4, 5.

144. $(1, 0)$ и $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$.

145. $xx_0 + yy_0 = R^2$.

147. $y = 2xx_0 - x_0^2$.

152. а) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$; б) $x^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 9$.

153. а) $(0, 0, 0)$; $\sqrt{3}$; б) $(2, -2, 0)$, $\sqrt{6}$; в) $(0, -1, 3)$, 4.

154. а) $x^2 + y^2 + z^2 = 13$; б) $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 + (z - 7)^2 = 26$.

157. $\left(\frac{13\sqrt{21}}{21}; \frac{26\sqrt{21}}{21}; \frac{52\sqrt{21}}{21}\right); \left(-\frac{13\sqrt{21}}{21}; -\frac{26\sqrt{21}}{21}; -\frac{52\sqrt{21}}{21}\right)$.

158. $(2; 1; \frac{1}{2})$, $(0; 3; -\frac{5}{2})$.

161. $R \cos \varphi$.

162. $4\sqrt{10}; 3\sqrt{17}; 5$.

166. $(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 = (R_1 \pm R_2)^2$.

174. $x = \pm d$.

175. $y = \pm z$.

176. $y^2 + z^2 = d^2$.

182. а) 2; б) -1; в) 5; г) 1; д) 0.

184. $y = \frac{x}{2}$.

186. Да.

187. $\left(\frac{3}{2}; 0\right); (0; 2)$

188. $y = 5$.

189. $(-5, 2)$.

190. Да. в точках $(2, 4)$ и $\left(\frac{38}{13}; \frac{44}{13}\right)$.

192. 24.

193. $(x - 4)^2 + y^2 = 25; (4; 0)$.

198. 45° или 135° .

199. $\frac{5}{6}; -\frac{\sqrt{2}}{6}; \frac{1}{2}$.

200. 2, 2.

201. $(a, b) = -22$, угол (a, b) тупой; $(a, c) = 8,5$, угол (a, c) острый; $(a, d) = 1$ угол (a, d) острый; $(b, d) = 2$, угол (b, d) острый; $(b, c) = 0$, угол (b, c) прямой; $(c, d) = 3/2$, угол (c, d) острый.

202. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right); \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

203. $m = -2$

205. $x + y + z - 3 = 0$

206. $m = \frac{11}{3}, n = \frac{2}{3}$.

207. $m = \frac{22}{5}$. Указание. Вектор $\vec{n} = (3; 4; -1)$ перпендикулярен данной плоскости. Чтобы прямая AB была параллельна плоскости, достаточно, чтобы $\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$.

208. Указание. Достаточно указать две точки, принадлежащие каждой из заданных плоскостей, например $(0; 1; 1)$ и $\left(-\frac{1}{4}; 0; \frac{5}{4}\right)$.

209. $4x - 5y + 2z - 14 = 0$.

212. а) Да, $(-1; 1; 1)$; 2) Нет. Указание. Решите систему трех уравнений и проверьте, принадлежит ли найденная точка четвёртой плоскости.

213. $4x - y + 5z + 2 = 0$.

214. С $\left(\frac{8}{5}; \frac{2}{5}; 0\right)$.

$$215. \text{ а) } C\left(-\frac{7}{5}; \frac{13}{5}; 0\right), D\left(0; \frac{5}{3}; -\frac{7}{3}\right), E\left(\frac{5}{2}; 0; -\frac{13}{2}\right).$$

$$216. (ABC): 4x + 2y + 7z - 13 = 0, D \in (ABC).$$

$$218. \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$219. (1, -4, 2).$$

$$220. \left(\frac{3(11-4\sqrt{11})}{22}; \frac{55+4\sqrt{11}}{22}; \frac{33-20\sqrt{11}}{11}\right); \left(\frac{3(11+4\sqrt{11})}{22}; \frac{55-4\sqrt{11}}{22}; \frac{33+20\sqrt{11}}{11}\right).$$

$$221. (x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = a^2, \text{ где } a = \frac{13 \pm \sqrt{47}}{2}.$$

$$227. x + 2y + 2z = 1.$$

$$228. \text{ а) } 2x + 2y - z = 4; \text{ б) } 3x - 3y + 2z = 3.$$

$$229. 3x + y = 3.$$

$$230. x - 5y - 2z = 4.$$

$$231. -x - y + z = 2.$$

К ГЛАВЕ 6

$$1. \text{ мм}^3, \text{ см}^3, \text{ м}^3, \text{ км}^3 \text{ и т.д.}$$

$$2. \text{ а) Увеличится в 8 раз; б) уменьшится в 27 раз; в) уменьшится на } 125000\%.$$

$$3. \text{ На } 30301 \text{ см}^3.$$

$$5. 140.$$

$$6. 27000 \text{ см}^3.$$

$$7. \Phi_1 \subset \Phi_2.$$

$$8. V_1 + 0,5V_2.$$

$$9. \text{ Ребро куба } 3 \text{ см.}$$

$$10. 6 \text{ см, } 9 \text{ см.}$$

$$12. 36 \text{ дм}^3.$$

$$13. 1) \frac{d^3 \sqrt{2}}{8}; 2) \frac{d^3 \sqrt{3}}{2}.$$

$$14. 1) 2\sqrt{3}r^3 \operatorname{tg} \alpha; 2) h^3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

$$15. 8r^3.$$

$$16. 2R^3 \sin \alpha \sqrt{3 \cos 2\alpha}.$$

$$17. 207 \cdot 10^5.$$

$$18. 0,5.$$

$$19. 0,5V.$$

20. $\frac{1}{6}V$.
21. $\frac{d^3}{3\sqrt{3}}$.
23. $ab\sqrt{a^2 + b^2}tg\alpha$.
24. $\frac{1}{2}l^3 \sin\alpha \sin\frac{\alpha}{2}tg\beta, 2l^2\sqrt{2} \sin\frac{\alpha}{2}tg\beta \cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.
25. $\alpha^2tg^2\alpha tg\varphi$.
26. Ящик кубической формы.
33. ≈ 58 кг.
34. ≈ 45 кг.
35. $6a^3$.
37. а) Да, равны; б) не обязательно равны.
38. $63\sqrt{3}$ дм³.
39. 30 см³.
40. $\frac{d^2\sqrt{3}}{4}\sin\alpha \cos^2\alpha$.
41. $\frac{1900}{3}$ м³.
42. 38000 м³.
43. 12 см³.
44. $4\sqrt[4]{3}$ см³.
45. 72 см².
46. 12 м².
47. $6\sqrt{6}$ дм³.
48. $\frac{3a^3}{8}$.
49. $\approx 5,3$ см³.
50. $\approx 90^\circ$.
52. $\approx 1200\text{м}^3$ и $\approx 300\text{м}^3$.
53. $\approx 42\ 000\text{м}^3$.
54. $\frac{c^3 \sin 2\alpha \sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha}}{4 \sin \beta}$.
55. $abc \sin\alpha$.
56. $\frac{1}{2}a^2b\sqrt{\left(2 + \sin^2 \alpha\right)^2 + \left(2 + \sin^2 \beta\right)^2 - 4}$.

57. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}(1+\cos\alpha)\sin\alpha \approx 291,62 \text{ см}^3$.
58. $\frac{5\alpha^3}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.
59. $3:1$.
60. Секущая плоскость проходит через точку, делящую сторону основания призмы в отношении $1:2$.
61. Ql .
62. $\arcsin\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{V}{a^3}\right)$.
63. $\frac{a^3\sin\alpha}{2}$.
64. $5:4$ или $4:5$.
65. $\frac{1}{3}\alpha^3\sin 2\alpha\sin atg\beta$.
66. $\frac{1}{2}b^3\sin\alpha$ (если $H=b$) или $b^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$ (если $H=2b\sin\frac{\alpha}{2}$).
69. $Q\sqrt{S\sin 2\alpha}$.
70. $\frac{Sd\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}$.
72. $V=abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$.
73. $48\sqrt{3} \text{ м}^3 \approx 83,1 \text{ м}^3$.
74. $\frac{Sd}{4}\cos\frac{\alpha}{2}$.
75. $134,4\cos 22^\circ \text{ дм}^3$.
76. $\arcsin\frac{\sqrt{(a+b)V}}{ab}$.
77. $\frac{\sqrt{2}dS}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$.
78. $\frac{h}{d}\leq\frac{\sqrt{7}}{2}$, угол между диагоналями основания 90° .
79. $10530\sqrt{2} \text{ см}^3$.
80. $\rho_{\text{полн}}=3a^2\sin\alpha$, $V=a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{2\cos\alpha+1}$.
81. $\frac{1}{2}d_1^2\sqrt{d_2^2-d_1^2}$.

$$83. \approx 173 \text{ шпал.}$$

$$84. \approx 50\%.$$

$$85. 242\sqrt{3}.$$

$$86. 56448 \text{ кг.}$$

$$93. \text{ Уменьшится в } n \text{ раз.}$$

$$94. 13\frac{1}{3}\text{см}^3.$$

$$93. \text{ Найдите площади оснований и боковых граней усечённой пирамиды.}$$

$$97. \frac{1}{3}abh.$$

$$98. \frac{1}{6}d^2h.$$

$$99. \sqrt{2}.$$

$$101. \frac{1}{6}a^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \gamma.$$

$$102. 72\sqrt{3}\text{дм}^3.$$

$$108. \text{ а) } \frac{2}{3}b^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha ; \text{ б) } \frac{2}{3}b^3 \cos \beta \sin^2 \beta ; \text{ в) } \frac{4}{3}b^3 \cos^2 \gamma \sqrt{-\cos 2\gamma}.$$

$$109. 5:1.$$

$$110. \frac{3}{16}a^2.$$

$$111. \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

$$112. \frac{ab}{12}\sqrt{3a^2 - b^2}.$$

$$113. 112\text{см}^3.$$

$$114. \frac{140\sqrt{3}}{3}\text{см}^3.$$

$$115. \frac{4\sqrt{2}}{3}\text{дм}^3.$$

$$118. 9:1.$$

$$121. \frac{a^3 \sin \alpha}{12\sqrt{3 - 4\sin^2 \alpha}}.$$

$$123. \frac{a^3}{12} \sin \alpha \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}.$$

$$124. (\sqrt[3]{4} - 1) : 1.$$

$$125. \frac{\sqrt{3}a^3}{24} \sin \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

$$126. 1) 341\frac{1}{3} \text{ см}^3; 768 \text{ см}^3, 3072 \text{ см}^3; 2) \text{ а) 4 решение; б) 2 решения.}$$

$$127. 72 \text{ см}^2.$$

$$128. \frac{c^3}{12} \sin \alpha \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{543\sqrt{3}}{4} \text{ см}^3.$$

$$130. 90^\circ.$$

$$131. \frac{32R^3}{3} \sin \frac{\alpha}{2} \cos^3 \frac{\alpha}{2} \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi.$$

$$132. V = \frac{47}{48} a^3; S = \frac{a^2(\sqrt{3} + 46)}{8}$$

$$133. 4 \cos 2\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$134. \frac{1}{3} h^3 \sin 4\alpha \operatorname{tg} \alpha$$

$$135. \text{ а) } \frac{\sqrt{2}}{6} a^3 \operatorname{tg} \alpha; \text{ б) } \frac{1}{6} a^3 \operatorname{tg} \alpha; \text{ в) } \frac{a^3 \sqrt{\cos \alpha}}{6 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$136. 1) \frac{na^2 \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} \sqrt{4b^2 \sin^2 \frac{180^\circ}{n} - a^2}}{24 \sin \frac{180^\circ}{n}}; 2) \frac{1}{12} a^2 \sqrt{3b^2 - a^2} \text{ и } \frac{1}{6} a^2 \sqrt{4b^2 - 2a^2}$$

$$137. \text{ Нет, так как площадь боковой грани должна быть больше } \frac{1}{4} Q.$$

$$138. \frac{\sqrt{2}}{3} m^3$$

$$140. \frac{1}{3} Q \sqrt{Q \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$141. \frac{1}{24} (a+b)^2 \sqrt{a^2 - 2ab \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$142. \frac{1}{16} c^3 \sqrt{3} \text{ или } \frac{1}{12} c^3 \sqrt{2}$$

142. Да, если n чётно; нет, если n нечётно.

$$144. \frac{(a^3 - b^3)\sqrt{-\cos 2\alpha}}{6\cos\alpha}, 45^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

145. $\frac{1}{24}(m^3 - n^3)\operatorname{tg}\alpha$ или $\frac{\sqrt{2}}{24}(m^3 - n^3)\operatorname{tg}\alpha$. В первом случае высота усечённой пирамиды проходит через вершину прямого угла основания, а во втором – через вершину его острого угла.

$$146. \frac{2}{3}R^2\sin 2\beta \cos\beta \sin\alpha.$$

$$148. \frac{2}{3}\pi(\sqrt{2}-1).$$

$$149. \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}.$$

$$150. \frac{5\sqrt{3}}{72}a^2h.$$

К ГЛАВЕ 7

1. а) Увеличится в 8 раз; б) уменьшится в 8 раз; в) увеличится в 64 раза.

$$3. 45\pi.$$

$$4. \frac{1}{\pi}.$$

$$5. 128\pi.$$

$$6. \frac{\pi a^3}{4}.$$

$$7. \frac{\pi}{4}d^3 \sin\alpha \cos^2\alpha.$$

$$8. \frac{\pi}{4}a^3.$$

$$9. \approx 25\,000 \text{ м}^3.$$

$$10. \approx 3,8 \text{ дм}^3.$$

$$11. \approx 0,46 \text{ дм}^3.$$

$$12. 4 : 9.$$

$$14. 1 : 4.$$

$$16. \approx 8200 \text{ м}.$$

$$17. \approx 210 \text{ м}.$$

$$18. \approx 1,9 \text{ кг}.$$

19. $\cos \alpha : \sin \alpha$.

20. $\frac{4\pi V\sqrt{3}}{9}$.

21. $\frac{\pi dS}{\sin \alpha}$.

22. $\frac{c^3 tg \frac{\alpha}{2}}{4\pi}$.

23. а) $\frac{\pi d^3 \cos \varphi \sin 2\varphi}{8 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$; б) $\frac{\pi d^2 \sin 2\varphi}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$.

24. $\frac{\pi a^3 ctg \frac{\alpha}{2} tg \varphi}{8 \sin \frac{\alpha}{2}}$.

26. 4 дм.

27. ≈ 140 м.

28. $\approx 2,6$ т.

29. Более 3000 т.

30. ≈ 5400 м².

31. $2\pi R^3 \sin \frac{\beta}{2}$.

32. $2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$.

33. $\frac{S\sqrt{\pi Q}}{2\pi}$.

34. $\frac{a^3}{4\pi}$.

35. $arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 35^\circ 16'$.

41. а) $\approx 2\%$; б) $\approx 1\%$.

47. а) Увеличится в n^3 раз; б) уменьшится в n^2 раз; в) увеличится в n^4 раза; г) уменьшится в n^2 раз.

48. $40,96\pi$.

49. $H = 1$.

51. $\frac{c^2 H}{12\pi}$.

52. 4 вагона.

54. $\frac{bc^2 \sin^2 \alpha}{3}$.
55. $\frac{2}{3} \pi \sqrt{S^3 \sin 2\alpha}$.
56. $\frac{\pi(R^2 - r^2)}{3}, R > r$.
58. а) 1,4 кг; б) 0,63 кг.
59. а) $\frac{a^3 \pi \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{216}$; б) $\frac{a^3 \pi \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{54}$.
60. $\frac{1}{3} \pi r^3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$.
61. а) $V_{\max} = \frac{32\pi R^3}{81}$ при $H = \frac{4R}{3}$; б) $V_{\min}$ при $\alpha = 2 \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$, где α – угол между образующей боковой поверхности и основанием конуса.
62. $2\pi a^3 \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.
63. В 8 раз.
64. $\approx 332 \text{ см}^3$.
65. $\frac{\pi}{3}(2 + \sqrt{3})r$ и $\frac{\pi}{3}(2 - \sqrt{3})r$.
66. $\frac{\pi}{27} l^3 \cos^3 \alpha \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$.
109. а) Увеличится в 1000 раз; в) уменьшится в 125 раз.
112. а) $\approx 3619 \text{ м}^3$, $\approx 1357 \text{ м}^2$, б) $\approx 718 \text{ м}^3$, $\approx 462 \text{ м}^2$.
113. $\approx 134 \text{ м}^3$.
140. $\approx 8,4 \text{ см}$.
141. $\approx 42 \text{ мм}$.
143. $4(\sqrt{2} - 1)^3 \approx 0,28$.

T.1	Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра.	18
T.2	Сечение конуса плоскостью, параллельной плоскости его основания, подобно основанию. Коэффициент подобия равен отношению высоты отсечённого конуса к высоте данного конуса.	47
T.3	Площадь боковой поверхности конуса равна половине произведения длины окружности основания на образующую.	54
T.4	Площадь боковой поверхности усечённого конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую.	67
T.5	Площадь боковой поверхности цилиндра, конуса, усечённого конуса равна произведению высоты фигуры на длину окружности, радиус которой есть отрезок срединного перпендикуляра к образующей от её середины до пересечения с осью вращения.	71
T.6	Вращение вокруг оси на угол φ есть изометрия.	104
T.7	Центральная симметрия является изометрией.	106
T.8	Осевая симметрия является изометрией.	109
T.9	Окружность симметрична относительно любой прямой, содержащей диаметр окружности.	110
T.10	Симметрия относительно плоскости является изометрией.	114
T.11	Композиция геометрических преобразований обладает свойством ассоциативности (сочетательности).	117
T.12	Композиция двух геометрических преобразований не обладает свойством коммутативности (переместительности), т.е. не для всяких геометрических преобразований f_1 и f_2 выполняется равенство $f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$.	118

T.13	Композицией любого геометрического преобразования f и тождественного преобразования E является данное преобразование f .	118
T.14	Композиция любого геометрического преобразования f и обратного ему преобразования f^{-1} есть тождественное преобразование E .	118
T.15	Изометрия является обратимым геометрическим преобразованием.	118
T.16	Композиция изометрий является изометрией.	119
T.17	У параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны.	135
T.18	Параллельный перенос является изометрией.	136
T.19	Композиция двух векторов (как двух параллельных переносов) есть вектор.	141
T.20	(Признак коллинеарности векторов.) Для того, чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них был произведением другого на некоторое число.	145
T.21	Сумма трёх некомпланарных векторов, отложенных от одной точки, изображается той диагональю параллелепипеда, построенного на векторах-слагаемых, начало которой находится в той же точке.	147
T.22	Два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно 0.	150
T.23	(Соотношение Лейбница.) Пусть дана треугольная пирамида $OABC$ (рис. 4.19), у которой G – точка пересечения медиан треугольника ABC . Положим: $OG = d$, $OA = a$, $AB = c_1$, $OB = b$, $OC = c$, $BC = a_1$, $CA = b_1$. Тогда $d^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$.	150

- T.24** Пусть $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ – два неколлинеарных вектора, лежащих в некоторой плоскости. Тогда для любого вектора $\vec{d}$, лежащего в этой плоскости, существуют числа x и y такие, что $\vec{d} = x \vec{l}_1 + y \vec{l}_2$, причём эти числа определяются единственным образом. 157
- T.25** Любой вектор $\vec{a}$ пространства однозначно представляется в виде линейной комбинации трёх базисных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$: 158
- $$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3.$$
- T.26** Преобразование подобия сохраняет отношения длин отрезков. 164
- T.27** Если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной её основанию, то в сечении получится многоугольник, гомотетичный основанию, причём центром гомотетии служит вершина пирамиды. 167
- T.28** Даны точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$. Серединой отрезка P_1P_2 является точка $P\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. 206
- T.29** Расстояние между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) координатной плоскости равно $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$. 208
- T.30** Пусть на плоскости введена прямоугольная система координат с единичными векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$ координатных осей Ox и Oy . Пусть $\vec{a}$ – некоторый вектор, а a_x и a_y – его проекции на оси координат. Тогда вектор $\vec{a}$ единственным образом представляется в виде $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$. 215
- T.31** Пусть в пространстве введена прямоугольная система координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ координатных осей Ox, Oy, Oz . Тогда вектор $\vec{a}$ единственным образом представляется в виде $a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$. 216

T.32	Всякое уравнение первой степени $ax + by + cz + d = 0$ задаёт в координатном пространстве единственную плоскость, которая перпендикулярна вектору с координатами $(a; b; c)$.	221
T.33	Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.	251
T.34	Все поперечные сечения треугольной призмы равны основанию.	260
T.35	Все поперечные сечения призмы имеют одну и ту же площадь.	261
T.36	Объём призмы равен произведению площади её основания на высоту.	261
T.37	Каждое поперечное сечение треугольной пирамиды, заключённое между основанием и вершиной, является треугольником, подобным основанию. Если h – высота пирамиды и k – расстояние от вершины до плоскости поперечного сечения, то площадь поперечного сечения равна площади основания, умноженной на число $\frac{k^2}{h^2}$.	265
T.38	Отношение площади поперечного сечения к площади основания пирамиды равно $\frac{k^2}{h^2}$, где h – высота пирамиды, а k – расстояние от вершины пирамиды до плоскости поперечного сечения.	267
T.39	Если две пирамиды имеют одну и ту же площадь основания и одну и ту же высоту, то их поперечные сечения, равноудалённые от вершин, имеют одну и ту же площадь.	267
T.40	Если две пирамиды имеют одну и ту же площадь основания и одну и ту же высоту, то они имеют один и тот же объём.	268
T.41	Объём треугольной пирамиды равен одной трети произведения площади её основания на высоту.	268

T.42	Объём пирамиды равен одной трети произведения площади её основания на высоту.	271
T.43	Объёмы двух подобных фигур относятся как кубы их соответствующих линейных размеров.	275
T.44	Каждое поперечное сечение прямого кругового цилиндра есть круг, равный основанию.	294
T.45	Объём кругового цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.	295
T.46	Даны конус высоты h и его поперечное сечение, высекаемое плоскостью, удаленной от его вершины на расстояние d . Тогда площадь поперечного сечения конуса равна площади его основания, умноженной на $\frac{k^2}{h^2}$.	297
T.47	Объём кругового конуса равен одной трети произведения площади его основания на высоту.	299
T.48	Объём шара выражается через его радиус по формуле $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R – радиус шара.	304
T.49	Объём шарового сегмента находится по формуле $V_{\text{шар.сегм.}} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$, где R – радиус шара, h – высота шарового сегмента.	307
T.50	Объём шарового сектора находится по формуле $V_{\text{шар.сект.}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$, где R – радиус шара, h – высота шарового сегмента, присоединением к которому получен шаровой сектор.	308

0.1	<i>Цилиндром</i> называется фигура, полученная вращением прямоугольника вокруг его стороны.	8
0.2	<i>Цилиндром</i> называется фигура, ограниченная замкнутой цилиндрической поверхностью и двумя фигурами, которые получаются от пересечения этой поверхности двумя параллельными плоскостями, пересекающими образующие.	11
0.3	<i>Вписанной в цилиндр</i> называется такая призма, основания которой вписаны в основания цилиндра.	29
0.4	<i>Описанной около цилиндра</i> называется такая призма, основания которой описаны около оснований цилиндра.	29
0.5	<i>Конусом</i> называется фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей один из катетов этого треугольника.	42
0.6	<i>Высотой конуса</i> называется перпендикуляр, проведённый из его вершины к плоскости основания	43
0.7	Конус называется <i>равносторонним</i> , если его осевое сечение – равносторонний треугольник.	46
0.8	Пирамида называется <i>вписанной в конус</i> , если вершина пирамиды совпадает с вершиной конуса, а основание пирамиды вписано в окружность основания конуса.	60
0.9	Пирамида называется <i>описанной около конуса</i> , если вершина пирамиды совпадает с вершиной конуса, а основание пирамиды описано около основания конуса.	61
0.10	Усечённым конусом называется часть конуса, заключённая между его основанием и сечением, параллельным основанию.	65

0.11	Перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки одного основания усечённого конуса на плоскость другого основания, называется высотой усечённого конуса.	65
0.12	Усечённая пирамида называется <i>вписанной в усечённый конус</i> , если основания пирамиды вписаны в основания усечённого конуса.	68
0.13	Усечённая пирамида называется <i>описанной около усечённого конуса</i> , если основания пирамиды описаны около оснований усечённого конуса.	68
0.14	За площадь поверхности шара, полученного вращением полукруга вокруг диаметра, принимается предел, к которому стремится поверхность, получаемая вращением около того же диаметра правильной вписанной в полуокружность ломаной линии при неограниченном увеличении числа её звеньев.	74
0.15	Пусть в пространстве заданы две геометрические фигуры F и F_1 . Если каждой точке X фигуры F ставится в соответствие единственная, вполне определённая точка X_1 фигуры F_1 и при этом каждая точка X_1 фигуры F_1 соответствует какой-либо точке X фигуры F , то такое соответствие называют <i>отображением фигуры F на фигуру F_1</i> .	96
0.16	Если точке X фигуры F ставится в соответствие точка X_1 фигуры F_1 , то точка X_1 называется <i>образом</i> точки X , а точка X называется <i>прообразом</i> точки X_1 .	97
0.17	Геометрическое отображение фигуры F на фигуру F_1 называется <i>взаимно однозначным</i> , если при этом отображении разные точки фигуры F имеют разные образы.	98
0.18	Если h – взаимно однозначное геометрическое отображение фигуры F на фигуру F_1 , то у каждой точки X_1 фигуры F_1 , имеется единственный прообраз – некоторая точка X фигуры F . Если поставить в соответствие каждой точке X_1 фигуры F_1 эту единственную точку X фигуры F , то получится отображение фигуры F_1 на фигуру F , называемое отображением, <i>обратным</i> к отображению h .	99

0.19	Если каждой точке X пространства ставится в соответствие единственная точка X_1 и при этом точка X_1 соответствует какой-либо и притом единственной точке X , то такое соответствие между точками пространства называют его <i>геометрическим преобразованием</i> .	99
0.20	Геометрическое преобразование пространства, при котором любые две его точки X и Y переходят в такие точки X_1 и Y_1 , что $X_1Y_1 = XY$, называют <i>изометрией</i> пространства.	100
0.21	Пусть в пространстве заданы прямая p и угол φ . Через любую точку A пространства проведём плоскость $\alpha \perp p$ и пересекающую её в точке O . В этой плоскости точка A переходит в точку A_1 посредством поворота вокруг точки O на угол φ . Такое геометрическое преобразование точки A называется <i>вращением пространства вокруг оси p на угол φ</i> .	104
0.22	Точки A и A_1 называются <i>симметричными относительно точки O</i> , если точка O является серединой отрезка AA_1 . При этом точка O считается симметричной себе самой.	106
0.23	Геометрическое преобразование пространства, при котором всякая точка X переходит в симметричную ей относительно точки O точку X_1 , называется центральной симметрией пространства с центром O .	106
0.24	Геометрическое преобразование пространства, при котором всякая точка некоторой прямой a остается на месте (является неподвижной), а любая точка, не лежащая на ней, переходит в симметричную ей относительно этой прямой точку, называется симметрией пространства относительно прямой a или осевой симметрией.	108
0.25	Если для данной фигуры имеется такая прямая, что для каждой точки фигуры симметричная ей относительно этой прямой точка тоже принадлежит фигуре, то говорят, что данная фигура имеет ось симметрии – указанную прямую.	110
0.26	Точки A и A_1 называются симметричными относительно плоскости α , если прямая AA_1 перпендикулярна плоскости α в точке O и $AO = OA_1$.	113

- 0.27** Симметрией относительно плоскости называется преобразование пространства, при котором все его точки переходят в точки, симметричные им относительно этой плоскости. 113
- 0.28** Плоскость называется *плоскостью симметрии фигуры*, если симметрия относительно этой плоскости переводит эту фигуру в себя. 114
- 0.29** Для всяких двух преобразований f_1 и f_2 пространства можно построить третье преобразование f_3 следующим образом: если преобразование f_1 переводит точку A в точку A_1 , т.е. $f_1(A) = A_1$, а преобразование f_2 переводит точку A_1 в точку A_2 , т.е. $A_2 = f_2(A_1) = f_2(f_1(A))$, то преобразование, при котором точка A переходит в точку A_2 , называют композицией преобразований f_1 и f_2 . 116
- 0.30** Параллельным переносом называется такое геометрическое преобразование пространства, при котором каждая точка X переходит в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. 134
- 0.31** Совокупность всех равных друг другу направленных отрезков называется *свободным вектором*, или просто *вектором*. 139
- 0.32** Вектор, соответствующий направленным отрезкам, начало и конец которых совпадают, называется *нулевым вектором* и обозначается $\vec{0}$. По определению нулевой вектор не имеет направления. 139
- 0.33** Для нахождения суммы двух произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нужно вектор $\vec{a}$ отложить от конца вектора $\vec{b}$ (говорят ещё «начало вектора $\vec{b}$ совместить с концом вектора $\vec{a}$ »). Тогда суммой $\vec{a} + \vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$. 140
- 0.34** Два вектора, сумма которых равна нулевому вектору, называются противоположными. 143

0.35	Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что сумма векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равна вектору $\vec{a}$, т.е. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.	144
0.36	Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число $p \neq 0$ называется коллинеарный ему вектор длиной $ p \cdot \vec{a} $, сонаправленный с вектором $\vec{a}$, если $p > 0$, и противоположно направленный, если $p < 0$.	144
0.37	Три (или более) векторов называются компланарными, если они лежат или в одной плоскости или в параллельных плоскостях.	145
0.38	<i>Углом между двумя ненулевыми</i> векторами называют угол между соответствующими им направленными отрезками, исходящими из одной точки.	148
0.39	Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними. Если хотя бы один из двух векторов нулевой, то их скалярное произведение равно 0.	148
0.40	Упорядоченная тройка из любых трёх некопланарных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называется базисом в пространстве.	157
0.41	Говорят, что вектор $\vec{a}$ разложен по трём некопланарным векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, если его можно представить в виде $\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$, где x_1, x_2, x_3 – некоторые числа.	157
0.42	Геометрическое преобразование пространства называется <i>преобразованием подобия</i> , если при этом преобразовании расстояния между соответствующими точками изменяются в одно и то же число раз, т.е. для любых двух точек X и Y фигуры F и X_1 и Y_1 фигуры F_1 , в которые они переходят, $X_1 Y_1 = k XY$.	164
0.43	Геометрическое преобразование пространства с неподвижной точкой O , которое всякой точке X , отличной от O , ставит в соответствие такую точку X_1 , что $\overrightarrow{OX_1} = k \cdot \overrightarrow{OX}$, где k – наперёд заданное число, не равное 0, называется <i>гомотетией с центром O и коэффициентом k</i> .	165

- 0.44** Абсциссой точки Р называется координата основания перпендикуляра, опущенного из точки Р на ось Ox ординатой точки Р называется координата основания перпендикуляра, опущенного из точки Р на ось Oy . 196
- 0.45** Проекцией a_x вектора $\vec{a} = \overline{AB}$ на ось Ox называется длина его составляющей $\overline{A_1B_1}$ по этой оси, взятая со знаком «плюс» или «минус». При этом берётся знак «плюс», если направление вектора $\overline{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси Ox , и знак «минус», если эти направления противоположны. Если $\overline{A_1B_1} = \vec{0}$, т.е. точки A_1 и B_1 , совпадают, то $a_x = 0$. 215
- 0.46** Поперечным сечением призмы называется пересечение призмы с плоскостью, параллельной плоскости её основания. 260
- 0.47** Поперечным сечением пирамиды называется её сечение плоскостью, параллельной основанию. 265

Как работать с учебником	3
Глава 1. Цилиндр	7
§ 1.1. Цилиндр как фигура вращения	8
§ 1.2. Сечения цилиндра	12
§ 1.3. Развёртка цилиндра. Площадь поверхности цилиндра	17
§ 1.4*. Цилиндрическая винтовая линия	18
§ 1.5. Вписанные и описанные цилиндры	28
Глава 2. Конус	41
§ 2.1. Конус как фигура вращения	42
§ 2.2. Сечения конуса плоскостью	45
§ 2.3. Развёртка и площадь поверхности конуса	52
§ 2.4*. Коническая винтовая линия	54
§ 2.5. Вписанные и описанные конусы	60
§ 2.6. Усечённый конус	65
§ 2.7. Общая формула для вычисления площади боковых поверхностей некоторых фигур вращения	71
§ 2.8. Площадь поверхности шара и его частей	73
Глава 3. Геометрические преобразования	95
§ 3.1. Понятия геометрического отображения и геометрического преобразования	96
§ 3.2. Поворот плоскости вокруг точки на данный угол и вращение пространства вокруг оси на данный угол	101
§ 3.3. Симметрия относительно точки (центральная симметрия)	105
§ 3.4. Симметрия относительно прямой (осевая симметрия)	107
§ 3.5. Симметрия относительно плоскости (зеркальная симметрия)	112
§ 3.6*. Композиция геометрических преобразований	116
Глава 4. Векторы	133
§ 4.1. Параллельный перенос	134
§ 4.2. Векторы и линейные операции с ними	136
§ 4.3. Скалярное произведение векторов	147
§ 4.4. Базис на плоскости и в пространстве	157
§ 4.5. Преобразование подобия. Гомотетия и её свойства	160
§ 4.6*. Применения подобия и гомотетии	167

Глава 5. Декартова система координат и её применение	
в геометрии	193
§ 5.1. Определение прямоугольной системы координат на плоскости	194
§ 5.2*. Рене Декарт и его система координат	198
§ 5.3. Декартовы координаты в пространстве	201
§ 5.4. Формулы координат середины отрезка и расстояния между точками	204
§ 5.5. Уравнения фигур	209
§ 5.6. Координаты вектора	214
§ 5.7*. Уравнение плоскости	220
§ 5.8. Применение метода координат	222
Глава 6. Объёмы многогранников	249
§ 6.1. Общее представление об объёме. Объёмы куба и прямоугольного параллелепипеда	250
§ 6.2. Принцип Кавальери	254
§ 6.3. Объём призмы	260
§ 6.4. Объём пирамиды	264
§ 6.5. Объёмы подобных фигур	274
Глава 7. Объёмы фигур вращения	293
§ 7.1. Объём цилиндра	294
§ 7.2. Объём конуса	297
§ 7.3. Объём шара	301
§ 7.4. Объёмы частей шара	306
Ответы	325

**Гусев Валерий Александрович,
Рубин Александр Григорьевич**

**МАТЕМАТИКА:
АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ
ГЕОМЕТРИЯ**

11 класс

Базовый и углублённый уровни

Подписано в печать 20.07.16. Формат 70х90/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная.
Объём 22 п.л. Тираж 3 000 экз. Заказ № 520

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2;
953005 – литература учебная

Издательство «Баласс». 109147 Москва, Марксистская ул., д. 5, стр. 1
Почтовый адрес: 111123 Москва, а/я 2, «Баласс»
Телефоны для справок: (499) 110-69-68, (495) 368-70-54, 672-23-12
<http://www.school2100.ru> E-mail: izd@balass.su

Отпечатано в типографии «Лика»
105203 Москва, ул. Нижняя Первомайская, д. 47